С.М. Балакирев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

(с абсолютного нуля)

При поддержке творческого объединения
“Самообразование” self-edu.ru

С.М. Балакирев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

(с абсолютного нуля)

При поддержке

творческого объединения «Самообразование»

self-edu.ru

2019

С.М. Балакирев.

Теория вероятностей для школьников (с абсолютного нуля): учебное пособие, 2019 – 73 с.

Если вы только начинаете знакомиться с новой для себя областью математики – теорией вероятностей, то это пособие поможет вам получить начальные, базовые знания о природе случайных событий, о самой вероятности и о способах ее вычисления. Пособие составлялось с тем расчетом, чтобы шаг за шагом охватить весь курс школьной программы данной темы, освоив который, вы сможете решать самые разные задачи по теории вероятностей, встречающиеся в ОГЭ и ЕГЭ.

Особенностью данного пособия является изложение материала с самого начала, с самых истоков рассматриваемой темы и не предполагает у читателя наличия каких-либо начальных знаний в этой области. А приведенные примеры из реальной жизни, по мнению автора, способствуют лучшему усвоению и пониманию основ «поведения» случайных явлений. Кроме того, это пособие может помочь учителям расширить свой материал дополнительными примерами и способами объяснения основ вероятности.

Замечания, предложения и отзывы о пособии можно направлять автору через электронную почту sc_lib@list.ru.

Оглавление

Введение

Вряд ли сегодня кто скажет, существуют ли по-настоящему случайные явления в нашем мире или нет? Например, подбрасывая одну и ту же монетку в абсолютно одинаковых условиях и одинаковым образом, с точки зрения физики мы должны получать одно и то же ее положение: либо все время орел, либо все время решка. Аналогично обстоит дело и с игральными кубиками: если бы каждый бросок можно было бы повторять совершенно одинаковым образом и в совершенно одинаковых условиях, то мы видели бы выпадение одной и той же его грани. А вот привести пример события, которое бы менялось в экспериментах при одних и тех же исходных данных крайне затруднительно, если вообще возможно. Тогда про что же предмет «Теория вероятностей»? Дело в том, что многие явления удобнее представлять как случайные и, затем, использовать теорию вероятностей для анализа их поведения. Кроме того, исходные данные эксперимента часто невозможно точно измерить, так как физические приборы имеют (и всегда будут иметь) некоторые погрешности в своих измерениях. И эти маленькие погрешности впоследствии могут приводить к значительным изменениям. Впервые в науке это отметил американский ученый Эдвард Лоренц, изучая погодные явления. Он сформулировал свое замечание так: «взмах крыла бабочки в Техасе может впоследствии вызвать сильнейший ураган в Калифорнии». Это высказывание сейчас известно как «эффект бабочки». Так вот, получается, что даже при отсутствии «настоящих» случайностей для нас, людей, многие явления кажутся случайными и именно так нам проще их воспринимать, описывать и анализировать. Теория вероятностей как раз и предоставляет нам математический аппарат для «работы» с такими случайными явлениями. И сейчас мы начнем наше первое знакомство с ним.

Что же такое вероятность?

Представьте, что вы играете в дартс и дротиками нужно попасть в центр мишени. Но делаете это с закрытыми глазами. При такой «слепой» игре, скорее всего, ваши дротики будут равномерно покрывать область стены вблизи мишени. Условно это можно представить так (рис. 1).

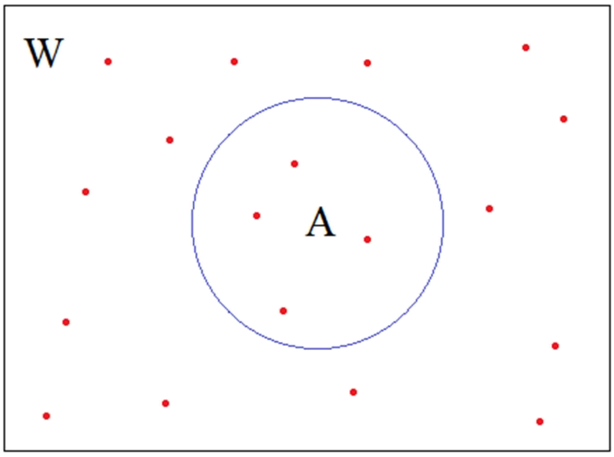


Рис. 1. Красные точки – следы от дротиков; синий круг (A) – мишень; прямоугольник (W) – фрагмент стены.

Для простоты положим, что все дротики попадают именно в этот фрагмент стены и равномерно ее покрывают. Тогда как определить, какая доля дротиков, в среднем, попадет в мишень A? Это легко вычислить, зная площади фигур A и W. Пусть площадь фигуры A равна S_A, а площадь стены W равна S_W. Тогда средняя доля попаданий дротиков в мишень A составит величину

$$P = \frac{S_A}{S_W}.$$

Например, если площадь стены $S_W = 100$ кв. ед., а площадь мишени равна половине площади стены – $S_A = 50$ кв. ед., то в среднем, доля попаданий составит:

$$P = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

То есть, примерно, в половине случаев дротики будут попадать в цель.

Читая этот текст, вы, наверное, обратили внимание на фразу «в среднем», которая постоянно здесь употребляется. Но что она означает? Дело в том, что бросание дротиков – это случайный процесс и вполне могут возникать ситуации, когда ни один из дротиков не попадет в мишень (рис. 2, а), или наоборот, все дротики попадут в мишень (рис. 2, б). Но даже при более-менее равномерном их распределении, доля попавших в мишень и не попавших, вряд ли составит величину 0,5 (рис. 2, в). А вот если мы будем бесконечно долго бросать дротики, то сможем вплотную приблизиться к величине 0,5 (рис. 2, г).

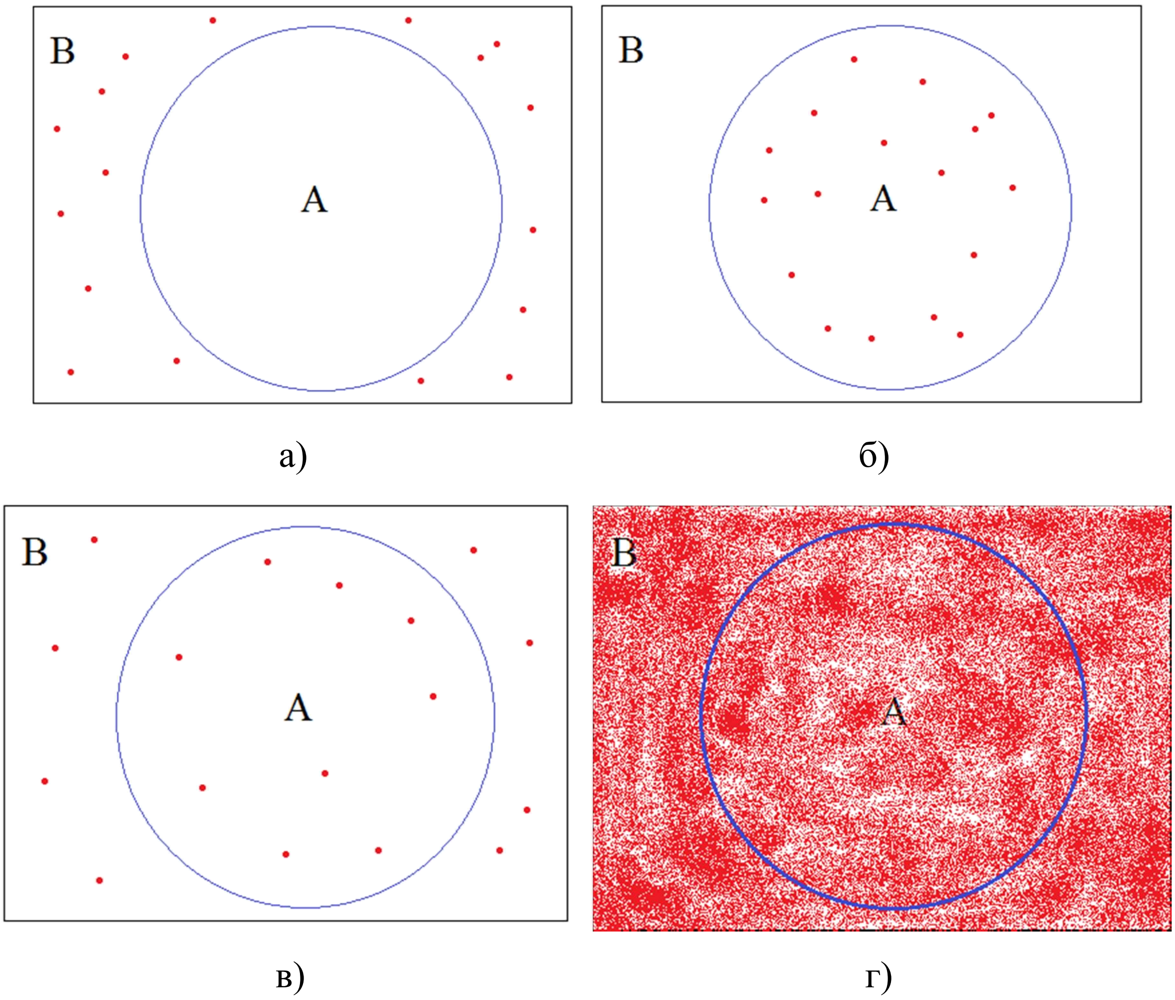


Рис. 2. Возможные исходы при бросании дротиков «в слепую».

Из этих рисунков наглядно видно, что если объединить исходы рис. 2, а, б, в и другие подобные им случаи с небольшим числом бросков, то рано или поздно получим картину, представленную на рис. 2, г. Это и есть визуальное представление понятия «в среднем». Например, если взять четыре исхода с небольшим числом бросков и долями попаданий в мишень

$$P_1 = 0,48,\ P_2 = 0,51,\ P_3 = 0,45,\ P_4 = 0,52,$$

то, усредняя их, получим значение:

$$P = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{4} = \frac{0,48 + 0,51 + 0,45 + 0,52}{4} = 0,49$$

Это эквивалентно объединению этих четырех исходов (при условии, что дротики не попадали в одну и ту же точку дважды) и вычисления доли уже объединенной картины. Поэтому, когда говорят «в среднем», подразумевают предельный случай бесконечного числа экспериментов.

Вернемся теперь к нашему числу 0,5 – доли попадания дротиков в мишень, которая занимает половину стены. Если мы в экспериментах сократим число дротиков до одного, то в среднем, все равно доля их попаданий в мишень будет равна 0,5. Получается, что это число является некой объективной характеристикой нашего случайного процесса, а именно – случайного попадания дротиков в мишень размером в половину стены. По сути, оно означает, что в 50% случаях дротик попадает в цель, а в 50% не попадает. В теории вероятностей такое число называют **вероятностью** возникновения того или иного события (кстати, не обязательно случайного). А сами события обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D и т.д. Например, в нашем случае можно ввести два таких события:

A: попадание дротиком в мишень;

B: не попадание дротиком в мишень.

Сами же вероятности событий часто обозначают так:

$$P(A),\ P(B),\ P(C),...$$

То есть, пишут букву P и в круглых скобках указывают событие, для которого определена вероятность. В данном случае вероятности случайных событий A и B (при условии, что мишень в половину стены), равны:

$$P(A)=\frac{S_A}{S_W}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$
$$P(B)=\frac{S_B}{S_W}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

Здесь S_B – площадь оставшейся части стены (не занятой мишенью). Очевидно, что она равна $S_B=S_W-S_A=100-50=50$ кв. ед.

Теперь посмотрим, в каких пределах может меняться вероятность. Предположим, что мы уменьшили площадь нашей мишени до нуля. Это эквивалентно тому, что мы ее попросту убрали со стены. Тогда вероятность события А – попадания дротиком в мишень, станет равной:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_W} = \frac{0}{100} = 0$$

То есть, если вероятность какого-либо события равна 0, то это значит, что событие не может произойти в ходе поставленного эксперимента. Другой крайний случай – когда мишень занимает всю стену, то есть, когда площади мишени и стены равны: $S_A = S_W$. В этом случае вероятность того же события А составит величину

$$P(A) = \frac{S_A}{S_W} = \frac{S_W}{S_W} = \frac{100}{100} = 1$$

Вероятность равная 1 говорит о том, что событие А всегда происходит в ходе эксперимента. Действительно, при мишени во всю стену промах попросту исключен и событие А происходит всегда. В результате мы получаем, что вероятность какого-либо события принадлежит диапазону значений от 0 до 1:

$$0 \le P \le 1$$

Вот мы с вами и познакомились с понятием вероятности. И подытоживая все сказанное, можно заключить, что **вероятность** – это доля появлений события в ходе некоторого эксперимента. Причем, рассматривая нашу игру в дартс, эту долю (вероятность) теоретически можно вычислить не только через площади, но и непосредственно через эксперименты. Например, если мы хотим вычислить вероятность попадания дротика в мишень (событие А), то должны сделать бесконечное число N экспериментов (бросков) и подсчитать сколько раз N_A цель была поражена. Тогда отношение

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

даст искомую вероятность. Разумеется, бесконечное число бросков сделать невозможно, однако, когда нет другого способа, используют эту формулу для приближенного вычисления вероятности. Причем, чем больше экспериментов N будет сделано, тем в среднем ближе будет оценка вероятности. При ограниченном числе N полученное значение называют **частотой появления события**.

Но мы не будем углубляться в расчеты экспериментальных вероятностей. В школьном курсе рассматриваются такие случайные события, для которых можно либо точно определить вероятность их возникновения, либо вероятности даны в условии задачи.

Базовая формула для вычисления вероятности

Что же это за события, для которых можно точно определить вероятности? Покажем это сначала на примере нашей игры в «слепой» дартс. Также будем полагать, что мишень занимает половину стены. И выделим два события:

А: дротик попадает в мишень;

В: дротик не попадает в мишень.

В чем особенность этих двух событий? Дело в том, что они оба образуют все возможные исходы при бросании дротиков. Или, как говорят в теории вероятностей, они образуют **полную группу событий**. И эта полная группа, в данном случае, состоит из двух событий: А и В. Обозначим размер этой группы через $n = 2$. Вторая важная особенность этих событий – это то, что они не могут произойти одновременно в одном эксперименте. Действительно, дротик либо попадает в цель, либо не попадает. Про такие события говорят, что они **несовместные**. Так вот, если мы имеем полную группу несовместных событий, то для них всегда выполняется равенство:

$$P(A) + P(B) = 1.$$

По сути, эта формула говорит, что при бросании дротика мы или попадем в цель или не попадем. И, разумеется, вероятность этого равна 1.

Наконец, последнее. Так как мишень занимает половину стены, а дротики равномерно распределяются по ней, то в половине случаев они будут попадать в цель, а в половине – не попадать. То есть, вероятности событий А и В равны $P(A) = P(B)$ и составляют величину 1/2. Это же значение можно вычислить еще и так. Учитывая, что $P(A) + P(B) = 1$ и $P(A) = P(B)$, имеем равенство:

$$P(A)+P(A)=1$$
$$2\cdot P(A)=1$$
$$P(A)=\frac{1}{2}$$

и, соответственно,

$$P(B)=P(A)=\frac{1}{2}$$

А теперь давайте применим этот же подход к вычислению вероятностей выпадения орла или решки симметрической монетки. Также обозначим два события:

А: выпадение орла;

В: выпадение решки.

Эти события образуют полную группу событий, то есть, при подбрасывании монетки никакое другое событие, кроме этих двух, произойти не может. Размер этой группы также равен $n=2$. Очевидно, что они несовместны (не могут оба произойти одновременно при однократном подбрасывании) и равновероятны (так как стороны монетки совершенно одинаковы). Отсюда автоматически получаем, что

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$$

Чуть усложним задачу и рассмотрим игральный кубик с одинаковыми шестью гранями. Каждая грань кубика пронумерована от 1 до 6. И для них введем шесть событий: $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6$. Эти несовместные события образуют полную группу событий размером $n=6$ и равновероятны (так как грани кубика абсолютно одинаковы, а сам кубик имеет одинаковую плотность и материал в каждой его точке). Тогда неизбежно получаем следующие вероятности появления той или иной грани кубика:

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=P(A_5)=P(A_6)=\frac{1}{6}$$

потому что

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)=1$$

Теперь внимательно посмотрите на полученные формулы. В знаменателе каждой из них стоит число n – размер группы, а в числителе записана 1. Обозначим ее через $m=1$ – это число элементарных несовместных событий благоприятных тому или иному исходу. Например, если при бросании игрального кубика ввести такое событие:

А: выпадение числа 1 или числа 3,

то для него будут благоприятны уже два элементарных события: A_1 и A_3. И в этом случае $m=2$. Соответственно, вероятность этого события будет равна:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Вот мы с вами познакомились с первой формулой для вычисления вероятностей некоторых событий:

$$P=\frac{m}{n}$$

Здесь n – это размер полной группы несовместных равновероятных событий; m – число элементарных событий (из полной группы), благоприятных некоторому исходу (для которого и вычисляется вероятность).

Чтобы лучше понять как применять данную формулу, рассмотрим несколько типовых задач из ЕГЭ по теории вероятностей.

Задача 1. В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение.

Обратите внимание на формулировку «в среднем». Она указывает на то, что числа 1000 и 7 непосредственно описывают вероятности подтекания и не подтекания насосов.

Далее, мы можем рассмотреть группу из $n=1000$ насосов. Здесь каждый насос можно воспринимать как отдельное элементарное несовместное событие (так как для контроля выбирается только один). А все вместе они образуют полную группу событий. Запишем событие, вероятность которого требуется найти:

А: случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Число благоприятных исходов для него будет равно $m = 1000 - 7 = 993$, так как именно столько насосов из 1000, в среднем, не подтекают. Подставляем эти значения в формулу вычисления вероятности, получаем:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{993}{1000} = 0,993$$

Ответ: 0,993.

Задача 2. В фирме такси в данный момент свободно 35 машин: 11 красных, 17 фиолетовых и 7 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

Решение.

Здесь понятия «в среднем» не требуется, так как имеется ограниченная выборка из 35 такси. Мы из этих машин составляем полную группу несовместных и равновероятных событий размером $n = 35$. Далее, вводим искомое событие

A: приедет зеленое такси.

И, так как зеленых машин 7, то благоприятных исходов для события A равно $m = 7$. Подставляем эти величины в формулу вычисления вероятности, получаем:

$$P = \frac{7}{35} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Ответ: 0,2.

Задача 3. На тарелке 16 пирожков: 8 с мясом, 3 с яблоками и 5 с луком. Настя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с мясом.

Решение.

Решение этой задачи аналогично предыдущей, только вместо такси пирожки с различными начинками. Попробуйте решить ее самостоятельно.

Осторожно, вероятность!

Только что мы с вами познакомились с относительно простой формулой расчета вероятности $P = m / n$ и довольно тривиальными задачами, которые можно решить буквально в уме. Однако в некоторых ситуациях поведение данной формулы не так очевидно, как это может показаться на первый взгляд.

Представьте, что вы сидите в казино за рулеткой, где можно ставить фишки на «красное» или «черное». Если шарик, запущенный крупье, попадает в красный кармашек, то выигрывает «красное», а если в черный – то «черное». Вероятности выигрыша «красного» и «черного» равны по 0,5. Допустим, во время игры вы заметили, что «красный» выпал десять раз подряд. Как вы думаете, повышает ли это обстоятельство шанс выпадения «черного» при следующем броске? В действительности нет, вероятность как была 0,5, так и осталась! И не важно сколько раз до этого выпадало «красное». Оно могло выпасть даже 100 раз подряд, все равно, при последующем броске вероятность появления «черного» остается 0,5. Тот же самый эффект можно наблюдать и при подбрасывании симметрической монетки: неважно сколько раз подряд до этого выпадал орел, вероятность выпадения решки при последующем броске остается прежней – 0,5!

На первый взгляд это может показаться нелогичным, так как вероятности по 0,5 говорят нам, что примерно в половине случаев мы получим орла, а в остальных исходах – решку. Но вероятность не стоит путать с частотой повторения событий. Нужно помнить, что значение 0,5 по вероятности достигается только для бесконечного числа экспериментов. А для любого конечного числа, пусть даже и большого, это правило может даже близко не соблюдаться. Конечно, случаи, когда решка выпадает, например, 20 раз подряд крайне редки, но вполне возможны. Это естественное поведение случайных событий. Если все это звучит неубедительно, то вы, наконец, можете еще и так объяснить неизменность вероятности. Допустим, до вас монетку подбрасывал другой человек и у него 100 раз подряд выпал орел. Вы, ничего об этом не зная, взяли у него эту монетку. Что же теперь получается, что эта монетка «заряжена» на выпадение решки? Если бы это было так, то можно было бы почти наверняка выигрывать любое пари, подбрасывая монетку и загадывая выпадение решки. Но, увы, такой фокус не пройдет, так как вероятность остается прежней – 0,5.

Что такое противоположные события и зачем они нужны

Вернемся к нашей игре в дартс «в слепую», когда дротики равномерно покрывают прямоугольную область стены W, на которой висит мишень A (рис. 3). И введем событие

A: дротик попадает в мишень.

Противоположным к нему будет событие:

B: дротик не попадает в мишень.

Противоположное событие в теории вероятностей обозначают той же латинской буквой, но с чертой наверху. То есть, противоположное событие для A записывается как $\overline{A}$ и соответствует событию B. Далее вместо B мы будет использовать $\overline{A}$.

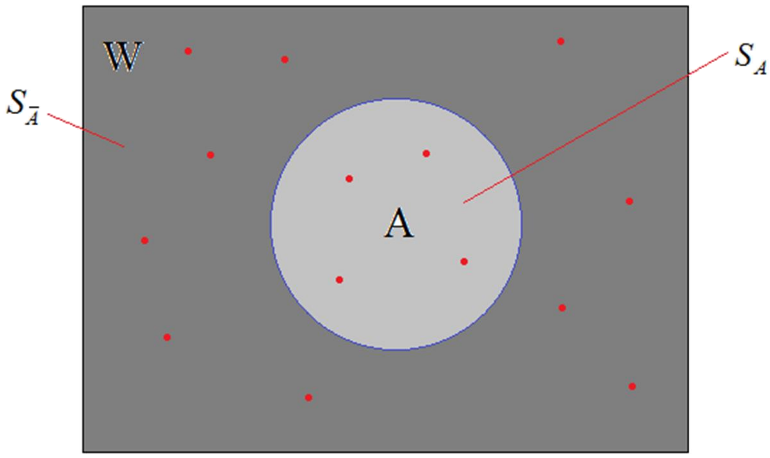


Рис. 3. Красные точки – следы от дротиков; синий круг (A) – мишень; прямоугольник (W) – фрагмент стены.

Из рисунка 3 видно, что площадь события $\overline{A}$ составляет оставшуюся часть стены, не занятой мишенью A, то есть, противоположное событие образует как бы инверсию к основному событию. Соответственно, площадь этого противоположного события, равна:

$$S_{\overline{A}} = S_W - S_A$$

А его вероятность определяется следующим образом:

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{S_{\overline{A}}}{S_W} = \frac{S_W}{S_W} - \frac{S_A}{S_W} = 1 - \frac{S_A}{S_W}$$

И, так как $P(A)=\frac{S_A}{S_W}$, то вероятность события $\overline{A}$, равна:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Мы получили вполне очевидный результат, так как противоположное событие $\overline{A}$ охватывает все остальные исходы, которые не включает в себя событие А. Поэтому, вместе события $\overline{A}$ и А охватывают все возможные исходы эксперимента и, кроме того, всегда несовместны. Последнюю формулу можно еще записать и так:

$$P(\overline{A})+P(A)=1$$

Зачем вообще нужны эти противоположные события? Дело в том, что в ряде случаев они заметно упрощают решение задач. Например, представьте, что нужно вычислить вероятность выпадения чисел 1 или 2 или 3 или 4 или 6 при однократном бросании игрального кубика. Здесь исключено одно число 5. Тогда мы можем его представить в виде противоположного события:

$\overline{A}$: выпала грань кубика с числом 5.

Вероятность этого события нам уже известна: $P(\overline{A})=\frac{1}{6}$. Отсюда автоматически получаем значение искомой вероятности того, что выпадет какая-либо другая грань с числами 1 или 2 или 3 или 4 или 6:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Если этот пример вас не убедил в эффективности применения противоположных событий, то вот другой, немного более сложный. Бросаются два игральных кубика и нужно найти вероятность того, что сумма очков не будет равна 11. Для решения введем противоположное событие:

$\overline{A}$: сумма очков равна 11

и подсчитаем число благоприятных исходов для этого события. Это два варианта ($m=2$):

5+6; 6+5

Общее число исходов (размер полной группы равновероятных событий) равно $n = 6 \cdot 6 = 36$. Получаем вероятность противоположного события:

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

И, затем, находим искомую вероятность события А:

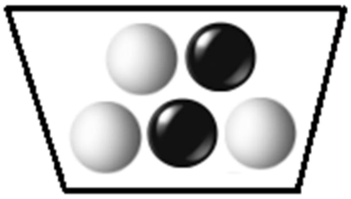
$$P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

Конечно, эту же задачу можно решить непосредственно через событие А, подсчитав для него число благоприятных исходов. Их было бы $m = 36 - 2 = 34$. Однако, это был бы более трудоемкий путь.

В дальнейшем вы увидите еще много различных задач, когда введение противоположного события упрощает их решение.

Зависимые и независимые события. Условная вероятность

Представьте, что у нас имеется урна, в которой лежат три белых и два черных шара. Мы наугад выбираем шар, определяем его цвет и кладем обратно в урну. Посмотрим, чему будет равна вероятность выбора белого шара и вероятность выбора черного шара?



Для начала определим два события:

А: из урны вынут белый шар;

В: из урны вынут черный шар.

Используя формулу $P = \frac{m}{n}$, мы легко можем вычислить эти вероятности. Для события А она будет равна:

$$P\left(A\right) = \frac{3}{5},$$

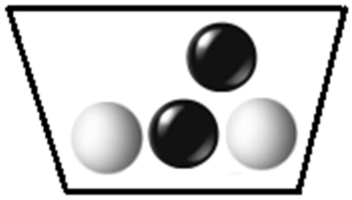
так как в урне всего $n=5$ шаров (размер полной группы элементарных равновероятных событий), а благоприятных для события А только $m=3$ шара. Соответственно, для события В, имеем:

$$P(B)=\frac{2}{5}.$$

Теперь изменим условия эксперимента и вынутые шары не будем класть обратно в урну. Посмотрим, как это отразится на вероятностях событий А и В.

Предположим, сначала был вынут белый шар, то есть, произошло событие А. В результате в урне осталось два белых и два черных шара. Чему стала равна вероятность события В? Да, теперь вместо 2/5 мы имеем значение

$$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

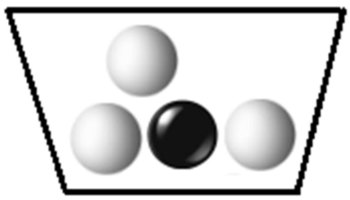


То есть, мы получили новое значение вероятности события В при условии, что событие А уже произошло. Такую вероятность называют **условной вероятностью** и она записывается так:

$$P(B\,|\,A)=\frac{1}{2}$$

По аналогии можно записать вероятность события А при условии, что событие В произошло (при исходных пяти шарах):

$$P(A\,|\,B)=\frac{3}{4}$$



Здесь можно заметить, что в первом случае, когда мы клали вынутые шары обратно в урну, условные вероятности равны вероятностям соответствующих событий:

$$P(A \mid B) = P(A)$$
$$P(B \mid A) = P(B)$$

Но, когда шары не возвращались в урну, то эти равенства уже не соблюдались. Все дело в том, что в первом случае (возврата шаров) события А и В были **независимы** друг от друга. То есть, возникновение одного из них никак не влияло на вероятность появления другого. А во втором случае события А и В становились **зависимыми**, когда появление одного из них влияло на вероятность появления другого. Фактически, это и есть понятия зависимых и независимых событий. Формально они звучат так:

События А и В называются **независимыми**, если возникновение одного из них в ходе эксперимента не влияет на вероятность появления другого.

События А и В называются **зависимыми**, если появление одного из них в ходе эксперимента, влечет изменение вероятности другого.

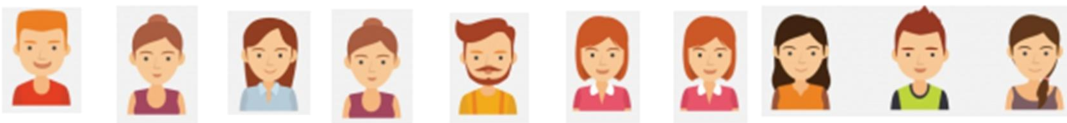
Далее мы увидим, как зависимость и независимость событий влияет на вычисление вероятности их произведения.

Что представляет собой вероятность произведения двух событий и как она вычисляется

Представьте, что вы решили познакомиться с новым человеком и для этого сформулировали для себя два критерия: он должен быть красивым и богатым. Далее, используя поиск ВКонтакте, выбрали случайным образом 100 профилей реальных людей (рис. 4, а). Начинаете просматривать эти профили и первым делом смотрите: красив он для вас или нет. Предположим, что в среднем один человек из 10 вам кажется привлекательным. Значит, по первому критерию красоты, у вас, в среднем, останется только 10 анкет из 100 (рис. 4, б). Далее, из них вы оставляете только богатых. Допустим, таких, в среднем, один из пяти, поэтому на последнем этапе остается всего две анкеты (рис. 4, в). А теперь посчитаем вероятность того, что случайно выбранный профиль будет отобран вами для знакомства. Учитывая, что у вас осталось всего две анкеты из 100, имеем число благоприятных исходов $m=2$ с их общим числом $n=100$. Соответственно, искомая вероятность, равна:

$$P=\frac{m}{n}=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$$

а) Исходные 100 профилей



б) Избранные красавцы (в среднем, каждый 10-й)

в) Богатые и красивые (в среднем, каждый 5-й)

Рис. 4. Пример процесса отбора анкет для знакомств

Совсем немного! Кажется, у большинства почти нет шансов с вами познакомиться? Но мы посмотрим на это число с других позиций. Что оно, по сути, из себя представляет? Это произведение двух дробей:

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{50}$$

Причем, первая дробь (1/10) – это доля красивых, а вторая (1/5) – это доля богатых. В данном случае доля и вероятность – это одно и то же, так как мы все рассматриваем «в среднем». И, вводя два события: A – анкета привлекательного человека; B – анкета богатого человека, можно записать вероятности их появления:

$$P(A)=\frac{1}{10} \text{ и } P(B)=\frac{1}{5}.$$

В этих обозначениях вероятность события С – выбора и красивого и богатого человека, запишется в виде:

$$P(C)=P(A)\cdot P(B)$$

или, это же выражение можно записать и так:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

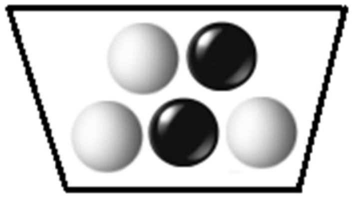
Из последних двух выражений следует, что событие $C=A\cdot B$ соответствует одновременному возникновению и события А и события В при проведении эксперимента (в нашем примере – это выбор и красивого (А) и богатого (В) человека). Обратите внимание, что в теории вероятностей союз «и» в таких фразах как «и событие А и событие В» означает умножение событий.

Приведенный пример наглядно показывает, почему для вычисления вероятности одновременного возникновения двух событий нужно применять формулу **произведения** вероятностей этих событий.

Однако, в нашем случае события А и В были независимы между собой. Действительно, богатство еще не означает красоту и, наоборот, красота никак не связана с богатством. Например, мы можем сначала выбрать всех богатых – это, в среднем, 20 человек из 100. Затем, из них выбрать красивых. Получим снова две анкеты. Как видите, здесь не важно в каком порядке делать отбор, так как события независимы между собой. Но что будет, если мы рассмотрим два зависимых события? Как в этом случае изменится формула вычисления вероятности их произведения?

Для этого рассмотрим урну с тремя белыми и двумя черными шарами. Из этой урны мы будем наугад вынимать сразу два шара. Нас интересует вероятность одновременного выбора и белого и черного шара. Для этого определим эти два события: А – выбор белого шара; В – выбор черного шара. Начальные вероятности каждого из них нам известны:

$$P(A)=\frac{3}{5} \text{ и } P(B)=\frac{2}{5}$$



Одновременный выбор двух шаров – это возникновение и события А и события В, то есть, нам нужно вычислить вероятность их произведения:

$$P(A \cdot B) = ?$$

или в виде

$$P(B \cdot A) = ?$$

Между этими двумя записями есть отличия, несмотря на то, что они приводят к одному и тому же числовому значению. Первое выражение $P(AB)$ говорит о том, что сначала мы взяли белый шар (произошло событие А), а затем, из оставшихся выбрали черный шар (событие В). Поэтому первую формулу следует записывать так:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

и ее значение равно

$$P(A \cdot B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

Второе выражение $P(BA)$ означает, что сначала был выбран черный шар (событие В произошло), а затем, из оставшихся взят белый шар (событие А). Здесь имеем:

$$P(B \cdot A) = P(B) \cdot P(A | B)$$

что дает числовое значение

$$P(B \cdot A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

Как видите, от перестановки событий значение вероятности их произведения не меняется и в общем случае можно записать равенство:

$$P(AB) = P(BA)$$

Теперь рассмотрим несколько задач из ЕГЭ, где используются формулы вероятности произведения событий.

Задача 1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение.

Введем три независимых события:

A: первый продавец занят с клиентом;

B: второй продавец занят с клиентом;

C: третий продавец занят с клиентом.

Вероятности этих событий даны по условию задачи и равны:

$$P(A)=P(B)=P(C)=0,2.$$

Нас интересует одновременное возникновение этих трех событий. Это есть не что иное, как вычисление вероятности их произведения. Имеем (с учетом их независимости):

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cdot B\cdot C)=0,2\cdot 0,2\cdot 0,2=0,008$$

Ответ: 0,008.

Задача 2. Помещение освещается фонарем с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение.

Введем три независимых события:

A: первая лампа перегорит в течение года;

B: вторая лампа перегорит в течение года;

C: третья лампа перегорит в течение года,

для которых дана вероятность их возникновения:

$$P(A)=P(B)=P(C)=0,3$$

Если мы теперь умножим эти вероятности

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C),$$

то получим вероятность события $D = A \cdot B \cdot C$, означающего, что перегорела и первая и вторая и третья лампы. А вот противоположное событие $\bar{D}$ будет охватывать все другие исходы, которые не вошли в событие D. Что это за исходы? Это как раз и есть перегорание хотя бы одной лампы в течение года. Значит, нам нужно вычислить

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

и

$$P(\bar{D}) = 1 - 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 1 - 0,027 = 0,973$$

Ответ: 0,973.

Задача 3. Бабушка испекла Маше 10 пирожков: 5 из них с яблоками, 2 с вишней и 3 с капустой. Найдите вероятность того, что Маша наугад сначала съела пирожок с капустой, затем, с яблоками и третий – с вишней.

Решение.

Введем три зависимых события:

A: Маша выбрала пирожок с капустой;

B: Маша выбрала пирожок с яблоками;

C: Маша выбрала пирожок с вишней.

Нам требуется вычислить вероятность события $D = A \cdot B \cdot C$. Так как события зависимы, то эта вероятность запишется в виде:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A, B)$$

Вероятность события A, равна $P(A) = 3/10$, так как с капустой пирожков $m = 3$, а всего их $n = 10$. После того, как Маша съела этот пирожок (событие A произошло), на тарелке осталось $n = 9$ пирожков: 5 с яблоками, 2 с вишней и 2 с капустой. Следовательно, вероятность события B при этих условиях, равна: $P(B \mid A) = 5/9$. Теперь на тарелке только $n = 8$ пирожков: 4 с яблоками, 2 с вишней и 2 с капустой. Вероятность того, что Маша выберет пирожок с капустой, равна: $P(C \mid A, B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Умножаем эти вероятности, получаем:

$$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

Ответ: 1/24.

Задача 4. В классе 16 мальчиков и 9 девочек. Для подготовки классной комнаты к занятиям случайным образом выбирают двух дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить будут два мальчика.

Решение.

Часто, чтобы не ошибиться при решении задач по теории вероятностей надо стараться представлять развитие событий, описанных в задании, у себя в голове. В данном случае этот процесс будет следующим:

1. Случайным образом выбирается первый дежурный из всех $n = 16 + 9 = 25$ детей.

2. Случайным образом выбирается второй дежурный уже из $n - 1 = 24$ детей.

Нам необходимо, чтобы и в первом и во втором случаях был выбран мальчик. Давайте запишем два таких события:

А: первый выбранный дежурный мальчик;

В: второй выбранный дежурный мальчик.

Как мы видим, здесь события А и В зависимы между собой, так как выбранный ребенок не возвращается для повторного выбора, и возникновение события А влияет на вероятность события В. Вычислим вероятности этих событий. Число благоприятных исходов для события А равно $m_A = 16$ мальчиков, имеем:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{16}{25}$$

После того, как событие А произошло, у нас осталось $n - 1 = 24$ ребенка и среди них $m_B = 15$ мальчиков, следовательно,

$$P(B \mid A) = \frac{m_B}{n-1} = \frac{15}{24}$$

Искомая вероятность того, что будут выбраны два мальчика (то есть, произойдет и событие А и событие В), равна:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$
$$P(AB) = \frac{16}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Ответ: 0,4.

Что такое совместные и несовместные события

Давайте вернемся к нашей игре в дартс «в слепую», когда игрок бросает дротики с закрытыми глазами в мишень на стене так, что они равномерно распределяются по всей ее поверхности и не вылетают за пределы. Но теперь мишеней будет две (рис. 5), для которых определим два таких случайных события:

A: дротик попал в первую мишень;

B: дротик попал во вторую мишень.

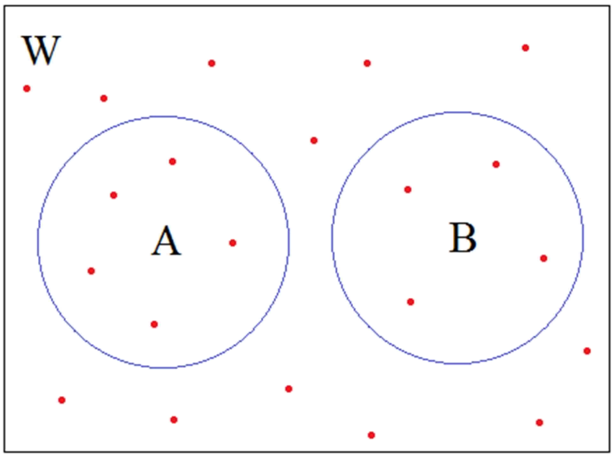


Рис. 5. Красные точки – следы от дротиков; синий круг (A) – первая мишень; синий круг (B) – вторая мишень; прямоугольник (W) – фрагмент стены.

Из рисунка наглядно видно, что бросая дротик, он может попасть или в мишень A, или в мишень B, или в стену. И не может возникать ситуаций, когда дротик одновременно попадает и в мишень A и в мишень B. То есть, события A и B не могут происходить одновременно при однократном бросании дротика. В теории вероятностей такие события называют **несовместными**.

Итак, события называются **несовместными**, если в ходе проведения эксперимента они не могут происходить одновременно.

Теперь повесим мишени так, чтобы они пересекались (рис. 6). И если дротик попадает в их пересечение, то это будет означать, что он попал в обе мишени. Это означает, что те же два события A и B здесь уже могут происходить одновременно, а значит, они становятся **совместными**.

События называются **совместными**, если в ходе проведения эксперимента они могут происходить одновременно.

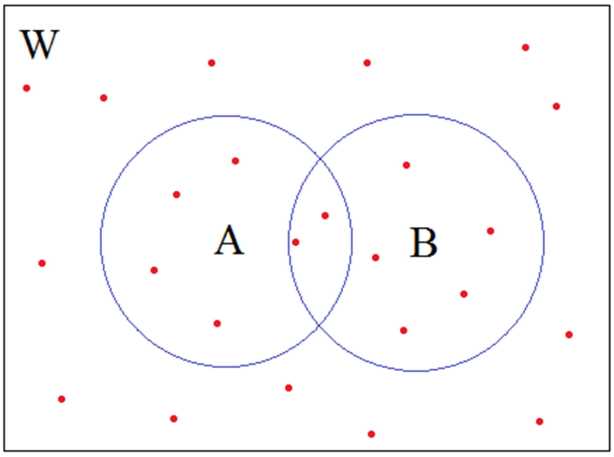


Рис. 6. Красные точки – следы от дротиков; синий круг (A) – первая мишень; синий круг (B) – вторая мишень; прямоугольник (W) – фрагмент стены.

Обратите внимание на слово «могут». Совместные события не обязательно происходят одновременно в каждом эксперименте. Они, также как и несовместные, могут появляться и по отдельности. И, как правило, лишь в некоторых случаях происходят совместно.

Чтобы лучше понять, какие события следует относить к совместным, а какие – к несовместным, приведем несколько примеров из задач по ЕГЭ.

Пример 1. Предположим, однократно бросается игральный кубик и рассматриваются два события:

А: выпадение числа 2;

В: выпадение числа 5.

Очевидно, что когда кубик бросается один раз, то сразу две его грани выпасть не могут, значит, события А и В не происходят одновременно, следовательно, они **несовместные**.

А вот если в эксперименте бросаются сразу два игральных кубика, то на одном из них вполне может выпасть число 2, а на другом – число 5. Значит, при такой постановке задачи события А и В становятся **совместными**.

Пример 2. Имеется фонарь с тремя одинаковыми лампами. Требуется найти вероятность того, что все три лампы не перегорят в течение года. Для решения вводятся три случайных события:

А: первая лампа перегорит в течение года;

В: вторая лампа перегорит в течение года;

С: третья лампа перегорит в течение года.

Являются ли эти события совместными или несовместными? Конечно, они **совместные**, так как в течение года могут перегореть все три лампы, а значит, произойдут все три события. Но если события сформулировать вот так:

А: первая лампа перегорит в течение первого года;

В: вторая лампа перегорит в течение второго года;

С: третья лампа перегорит в течение третьего года.

То при рассмотрении периода в один год события становятся **несовместными**, так как в течение года может произойти только событие А.

Обратите внимание, как изменение формулировок событий одной и той же задачи приводит к кардинальному изменению их свойств. Это одна из многих причин, по которой задачи по теории вероятностей нужно очень внимательно читать и также внимательно прописывать ход их решения.

Учимся вычислять вероятность суммы двух событий

Снова вернемся к, ставшей для нас уже классической, игре в «слепой» дартс, и рассмотрим случай с двумя мишенями, показанный на рис. 5. Правила игры такие: если игрок попадает в любую из двух мишеней, то ему начисляются соответствующие очки. Чтобы оценить эффективность игры, нас будет интересовать вероятность попадания дротика в мишень (не важно какую). Для этого определим такое событие:

С: дротик попал в одну из двух мишеней

и еще два вспомогательных:

А: дротик попал в первую мишень;

В: дротик попал во вторую мишень.

Как вычислить вероятность события С? Ранее мы с вами говорили, что эта вероятность будет равна доли площади мишеней на стене, которую можно вычислить по формуле

$$P(C) = \frac{S_A + S_B}{S_W},$$

где S_A – площадь мишени A; S_B – площадь мишени B; S_W – площадь стены W. И если расписать эту формулу вот так:

$$P(C) = \frac{S_A}{S_W} + \frac{S_B}{S_W},$$

то, замечая, что $\frac{S_A}{S_W} = P(A)$, а $\frac{S_B}{S_W} = P(B)$, получим:

$$P(C) = P(A) + P(B)$$

По сути, последняя формула говорит, что доля площади двух мишеней равна сумме долей каждой из них. Действительно, из рис. 5 мы это наглядно видим. А, учитывая, что доли – это и есть вероятности соответствующих событий, то мы с вами получили **формулу сложения вероятностей двух несовместных событий**. Кроме того, эту же формулу можно записать и в таком виде:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Она показывает, что в теории вероятностей случайные события можно складывать и получать третье:

$$C = A + B$$

И мы теперь знаем, что событие C интерпретируется как появление или события A или события B в ходе проведения эксперимента (в нашем примере попадание дротика в одну из двух мишеней).

Чтобы лучше понимать, как использовать формулу сложения вероятностей несовместных событий, рассмотрим несколько задач из ЕГЭ.

Задача 1. Однократно бросается игральный кубик. Требуется определить вероятность выпадения числа 1 или числа 3.

Решение.

Для решения этой задачи введем два события:

A: выпало число 1;

B: выпало число 3.

Очевидно, что в рамках данной задачи эти события несовместны. Их условно можно представить как две мишени: или попадаем в первую мишень (при броске кубика выпадает число 1), или попадаем во вторую мишень (при броске кубика выпадает число 3). Как видите, с точки зрения теории вероятностей, все то же самое, только вместо дротиков бросается кубик. И здесь нас интересует событие

$$C = A + B,$$

вероятность которого, равна:

$$P(C) = P(A) + P(B)$$

Ранее мы уже вычисляли вероятность выпадения грани кубика (не важно с каким числом). Она равна $\frac{1}{6}$ и искомая вероятность

$$P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Некоторые из вас могли заметить, что мы уже решали эту задачу, но с другими рассуждениями. Мы определяли полную группу элементарных несовместных событий размером $n = 6$, находили в ней число благоприятных исходов $m = 2$ для нашего события С и, затем, по формуле $P = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ вычисляли искомую вероятность. По сути, оба этих способа – это одно и то же. Они только записаны по-разному. Однако, как мы сейчас увидим, смотреть на подобные задачи с точки зрения формулы сложения вероятностей, бывает много эффективнее. Хотя простые задачи часто удобнее решать через формулу $P = m / n$.

Задача 2. Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение.

Здесь нам даны вероятности двух событий. Определим их:

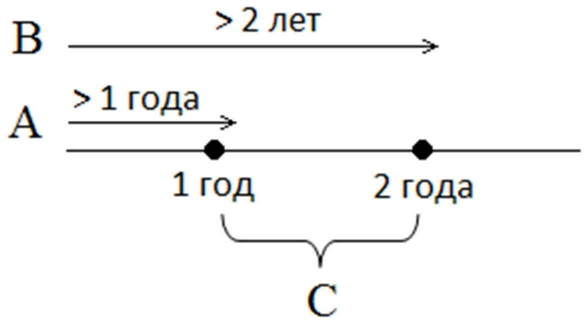
А: сканер прослужит больше года;

В: сканер прослужит больше двух лет.

Соответственно, $P(A) = 0{,}96$, $P(B) = 0{,}87$. По условию задачи нужно найти вероятность события С, которое сформулируем так:

С: сканер прослужит больше года, но меньше двух лет.

Для простоты понимания решения, ниже на рисунке условно представлены три события A, B и C.



Теперь, если перейти к противоположному событию $\overline{A}$, то оно будет означать, что сканер прослужит не более года и в результате получаем два несовместных события $\overline{A}$ и C, которые в сумме дают событие

$\overline{A}+C$: сканер прослужит не более двух лет.

Но это есть не что иное, как событие $\overline{B}$, значит, мы можем записать равенство для вероятностей этих событий:

$$P\left(\overline{A}+C\right)=P\left(\overline{B}\right)$$
$$P\left(\overline{A}\right)+P\left(C\right)=P\left(\overline{B}\right)$$
$$P\left(C\right)=P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\right)$$

Также мы уже знаем, что

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$$
$$P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)$$

Следовательно,

$$P\left(C\right)=1-P\left(B\right)-\left[1-P\left(A\right)\right]$$
$$P\left(C\right)=P\left(A\right)-P\left(B\right)$$

И, подставляя числовые значения, находим искомую вероятность:

$$P\left(C\right)=0{,}96-0{,}87=0{,}09$$

Ответ: 0,09.

Как видите, решить подобные задачи без применения формулы сложения вероятностей и использования противоположных событий, было бы крайне проблематично.

Давайте снова вернемся к нашей «слепой» игре в дартс, но теперь мишени будут частично наложены друг на друга (рис. 6). И рассмотрим те же три события:

A: дротик попал в первую мишень;

B: дротик попал во вторую мишень;

C: дротик попал в одну из двух мишеней.

Как мы ранее говорили, вероятность события C – это доля площади двух мишеней по отношению к площади всей стены:

$$P(C)=\frac{S_C}{S_W}$$

Но, если мы будем вычислять площадь мишеней, как и раньше, а именно:

$$S_C = S_A + S_B,$$

то у нас область пересечения будет посчитана дважды (рис. 7). Это даст неверную суммарную площадь мишеней на стене и вероятность события C будет посчитана неправильно. Для исправления этой ситуации необходимо из суммы $S_A + S_B$ один раз вычесть площадь пересечения S_{AB}.

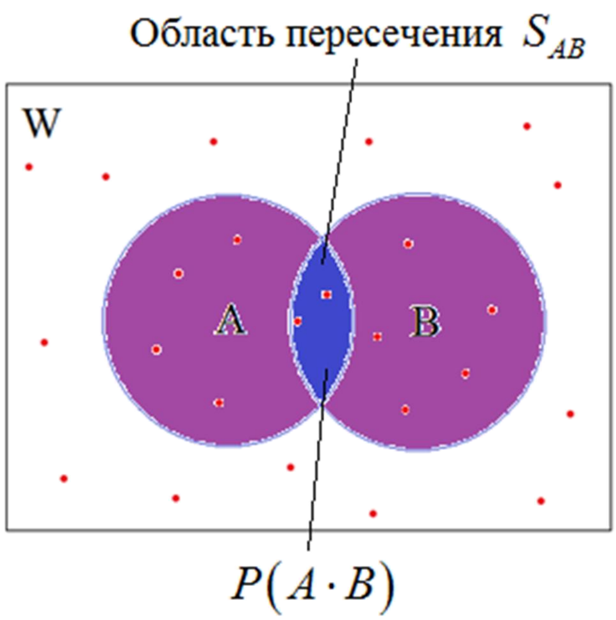


Рис. 7. Площадь мишеней при их частичном пересечении

Но как ее посчитать? Для этого внимательно посмотрим на рис. 7, из которого хорошо видно, что в области пересечения находятся точки, относящиеся и к мишени A и к мишени B. Значит, область пересечения состоит из событий, при которых происходит одновременное появление и события A и события B. Но мы уже знаем, что такие события записываются через произведение:

$$A \cdot B$$

а, вероятность такого произведения событий

$$P\left(A \cdot B\right)$$

в нашем случае будет в точности равна доли площади этого пересечения по отношению к площади всей стены, то есть,

$$P\left(A \cdot B\right) = \frac{S_{AB}}{S_W}$$

В результате формула вычисления вероятности суммы двух событий А и В в данных условиях может быть записана так:

$$P\left(A + B\right) = \frac{S_A}{S_W} + \frac{S_B}{S_W} - \frac{S_{AB}}{S_W}$$

Видите? Мы здесь в числителе сложили площади двух мишеней и вычли площадь их пересечения. И окончательно формула вероятности суммы двух событий принимает вид:

$$P\left(A + B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(AB\right)$$

В каких случаях следует использовать эту формулу? Как вы, наверное, уже заметили, события А и В стали совместными из-за пересечения мишеней. И именно эта совместность добавляет к формуле последнее слагаемое $-P\left(AB\right)$.

Поэтому здесь следует пользоваться таким правилом:

Если два события А и В **несовместны**, то достаточно использовать формулу

$$P\left(A + B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right)$$

Если же два события А и В **совместны**, то необходимо применять формулу

$$P\left(A + B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(AB\right)$$

Причем, обратите внимание, в общем случае можно всегда пользоваться последней формулой, которая при несовместных событиях будет давать $P\left(AB\right) = 0$ и она автоматически превратится в обычное сложение вероятностей двух событий. Однако, при решении задач по ЕГЭ, конечно, лучше сначала определять тип событий: совместные или несовместные, и после этого выбирать одну из двух формул.

Давайте теперь для закрепления материала рассмотрим несколько задач по ЕГЭ на использование этих формул.

Задача 3. На экзамене по геометрии школьнику достается один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Ромб», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос на тему «Описанная окружность», равна 0,15. Вероятность того, что вопрос одновременно относится к этим двум темам, равна 0,05. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение.

Определим два случайных события:

A: школьнику на экзамене достался вопрос на тему «Ромб»;

B: школьнику на экзамене достался вопрос на тему «Описанная окружность».

Так как есть вопросы, которые одновременно относятся к этим двум темам, то события A и B совместны.

В этой задаче нужно найти вероятность того, что школьник выберет вопрос или на тему «Ромб» или на тему «Описанная окружность». В теории вероятностей союз «или» означает сложение событий, поэтому мы будем искать

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Все эти вероятности нам даны по условию задачи:

$$P(A)=0{,}1;\ P(B)=0{,}15;\ P(AB)=0{,}05$$

Вычисляем, получаем:

$$P(A+B)=0{,}1+0{,}15-0{,}05=0{,}2$$

Ответ: 0,2.

Задача 4. В магазине канцтоваров продается 120 ручек, из них 15 – красных, 22 – зеленых, 27 – фиолетовых, еще есть синие и черные, их поровну. Найдите вероятность того, что Алиса наугад вытащит синюю или зеленую ручку.

Решение.

Так как в задаче нужно найти вероятность того, что Алиса выберет или синюю или зеленую ручку, то нам понадобятся два таких события:

A: Алиса наугад выбирает синюю ручку;

B: Алиса наугад выбирает зеленую ручку.

Учитывая, что Алиса вытаскивает только одну ручку, то события A и B несовместны. Далее, мы видим союз «или» в формулировке задачи, значит, нужно найти вероятность

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Вероятность $P(A)$ – это доля синих ручек, а вероятность $P(B)$ – это доля зеленых ручек. Вычислим их. Всего имеем $n=120$ ручек. Из них $m_B=22$ – зеленых и $m_A=\frac{120-15-22-27}{2}=28$ – синих. Следовательно,

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{28}{120} \text{ и } P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{22}{120}$$

Получаем значение искомой вероятности:

$$P(A+B)=\frac{28}{120}+\frac{22}{120}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$

Ответ: 5/12.

Парадокс Монти Холла

Вот мы с вами и рассмотрели основные теоретические моменты и некоторые практические задачи по теории вероятностей. Этих знаний вам будет вполне достаточно, чтобы решать соответствующие задачи по ОГЭ и ЕГЭ. Но представленная здесь теория становится знаниями только тогда, когда вы приобретаете навык правильно ее применять на практике. А для этого нужно решать самые разнообразные задачи на вероятность.

В качестве одного интересного примера мы сейчас посмотрим на довольно простую задачку, которая в свое время удивила многих обывателей и даже специалистов в этой области. Эта задачка была навеяна американской телевикториной «На что спорим?», которая шла с 1963 по 1976 годы. Ее ведущим был Монти Холл. И звучала примерно так. Представьте, что перед вами три закрытые двери: за двумя из них по козе, а за одной – автомобиль. Разумеется, вы не знаете где что находится. Ведущий предлагает вам выбрать одну из трех дверей. После этого он открывает другую дверь, за которой находится коза и спрашивает: хотите ли вы поменять свое решение? То есть, по сути, он спрашивает: повысится ли шанс выиграть автомобиль, если изменить свое решение и выбрать другую закрытую дверь?

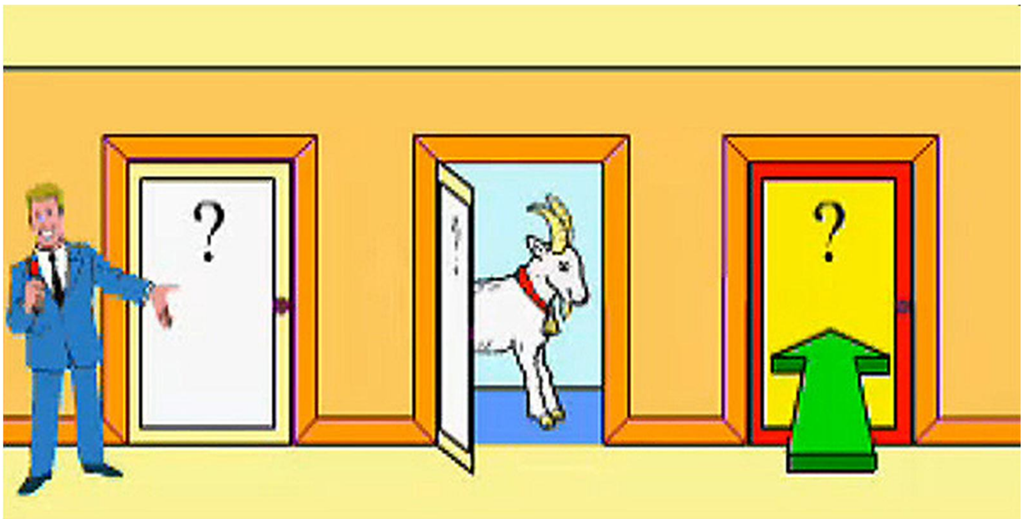


Рис. 8. Иллюстрация выбора дверей в парадоксе Монти Холла

Впервые столкнувшись с такой задачей, большинство математиков рассуждало так. Изначально (при всех закрытых дверях) вероятность выбора автомобиля составляет $P_1 = 1/3$. После того, как ведущий открыл одну дверь, за которой нет автомобиля, осталось две двери и за одной из них находится автомобиль. Следовательно, теперь вероятность правильного выбора составляет $P_2 = 1/2$.

Кажется, здесь все просто, понятно и логично. Однако в 1990 году Мэрилин вос Савант в колонке популярного журнала «Пэрэйд» (англ. «Parade») опубликовала свой ответ на этот вопрос [1]. Ее решение повергло в шок и возмутило своим невежеством не только маститых профессоров математики, но даже простых обывателей! Суть ее ответа заключалась в следующем. Вероятность выбора двери, за которой скрывается автомобиль, равна $P = 1/3$. Когда ведущий открывает дверь с козой, эта вероятность не меняется, так как выбор был сделан до того, как он открыл эту дверь. Даже если открыть все три двери после сделанного выбора, все равно вероятность останется 1/3, потому что это понятие о «среднем», а не о конкретной ситуации. Итак, после открытия двери, за которой прячется коза, вероятность остается прежней – 1/3. Но тогда выходит, что оставшиеся две двери (первая с козой, а вторая закрытая, но не выбранная) составляют вероятность 2/3, что за ними автомобиль. И, так как ведущий показал нам, что в данной конкретной ситуации за одной из этих двух дверей нет автомобиля, значит, за другой будет находиться автомобиль, но уже с вероятностью 2/3. Благодаря тому, что ведущий показал нам где нет автомобиля, мы, меняя свое решение, как бы выбираем сразу две другие оставшиеся двери. И, соответственно, увеличиваем свой шанс выиграть автомобиль до 2/3. В некотором смысле это похоже на ситуацию, когда нам удалось подсмотреть часть скрытых карт соперника, что повышает наш шанс на выигрыш.

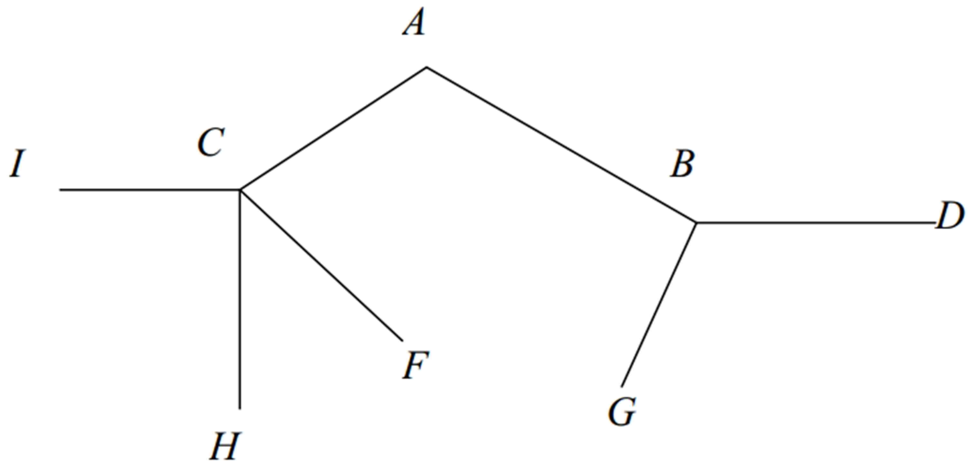
На свой опубликованный ответ о смене двери Мэрилин получила шквал писем (порядка 10 тысяч), в которых около 92% корреспондентов отмечали, что она ошибается. Среди авторов были и преподаватели математики, в том числе и с докторскими степенями. Их возмущало невежество Мэрилин в таких простых вопросах теории вероятностей.

Среди несогласных был известнейший математик Палу Эрдёшу [1]. Он стоял на своем, даже после математического доказательства правильности ответа Мэрилин. И сдался только тогда, когда было проведено компьютерное моделирование данной задачи и показана справедливость ее рассуждений.

Парадокс Монти Холла – это, наверное, самый яркий представитель задач по теории вероятностей, демонстрирующий как наша повседневная логика и интуиция идут вразрез с истинным положением дел. Как же нам не попасть в такую ситуацию и подобно Мэрилин вос Савант видеть суть вещей? Выход здесь только один: тренироваться на решениях разнообразных задач и учиться правильно логически рассуждать. Как раз сейчас мы и рассмотрим несколько типовых задач по теории вероятностей.

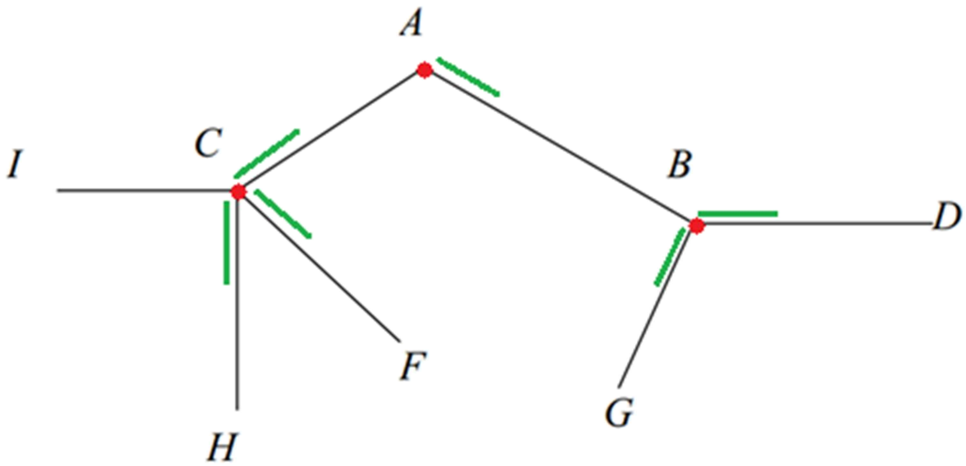
Разбираем задачки из ЕГЭ на умножение вероятностей

Задача 1. Павел Иванович совершает прогулку из точки I по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадет в точку G.



Решение.

Давайте для начала рассмотрим процесс выбора дорожек, позволяющий Павлу Ивановичу из точки I дойти до точки G. Сначала он попадает на развилку в точке C и, так как назад не идет, то остаются три равновероятных варианта, показанные зелеными отрезками на рисунке ниже. Это означает, что из точки C Павел Иванович попадет в точку A с вероятностью $P_1 = 1/3$. Затем, из точки A имеется только одна дорожка для продолжения пути, соответственно, она выбирается с вероятностью $P_2 = 1$. Далее, попадая в точку B, Павел Иванович может с равной вероятностью выбрать одну из двух дорожек: или в точку D, или в точку G. Вероятность того, что он выберет направление к G, равна $P_3 = 1/2$.



Теперь заметим, что Павел Иванович дойдет до точки G, если он сначала пройдет в точку A (вероятность 1/3), затем, в точку B (вероятность 1) и, наконец, дойдет до точки G (вероятность 1/2). То есть, должны произойти все эти три события. А это есть не что иное, как их произведение:

$$P\left(A \cdot B \cdot G\right)$$

Учитывая, что все три события независимы, получаем:

$$P(ABG) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(G)$$

$$P(ABG) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Ответ: 1/6.

В ЕГЭ часто встречаются задачи когда нужно определить вероятность выступления, например, 5-м по счету какого-либо спортсмена, музыканта или ученого. Вот типовая формулировка.

Задача 2. На соревнованиях по плаванию выступает 5 спортсменов из Италии, 4 из Германии, 6 из России и 3 из Китая. Порядок выступлений каждого спортсмена определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что 3-м по счету будет выступать спортсмен из России.

Решение.

Самый главный вопрос здесь: как это 3-е место влияет на искомую вероятность? Ответ очень простой – никак! Здесь абсолютно не важно о каком месте идет речь, имеет значение только то, что оно одно и на это одно место претендует

$$n = 5 + 4 + 6 + 3 = 18$$

спортсменов и среди них $m = 6$ из России. Получаем решение задачи в виде

$$P = \frac{m}{n} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Ответ: 1/3.

Но почему это именно так? Данную задачу можно представить еще в таком виде. Сначала мы случайным образом составляем список из 18 спортсменов, записываем их сверху вниз, и нумеруем от 1 до 18. Номер перед фамилией спортсмена – это и есть очередность его выступления. Теперь, куда бы мы не ткнули наугад пальцем в этом списке, в любой его позиции вероятность увидеть фамилию российского спортсмена будет равна 1/3. То есть, нам не важно какая это будет позиция: 3-я, 10-я или 18-я и т.д. Вот почему номер выступления здесь не важен.

Однако, подобная задача может быть усложнена и сформулирована таким образом.

Задача 3. В соревнованиях по плаванию участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Италии, 7 спортсменов из России и 5 из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что хотя бы один спортсмен из Италии будет выступать первым, вторым или третьим.

Решение.

Смотрите, во-первых, здесь у нас уже три места, вместо одного как в предыдущем случае. И, во-вторых, нужно найти вероятность того, что **хотя бы один** пловец из Италии будет стоять на этих трех местах. Здесь можно заметить, что инверсия случайного события «хотя бы один» означает «ни одного». Поэтому решить задачу проще через вычисление вероятности того, что на всех трех местах не будет ни одного спортсмена из Италии, а затем, найти противоположную вероятность. Для начала введем три события:

A: на первом месте нет пловца из Италии;

B: на втором месте нет пловца из Италии;

C: на третьем месте нет пловца из Италии.

И, очевидно, нам нужна вероятность $P\left(A\cdot B\cdot C\right)$. Чтобы расписать эту формулу нужно определиться: являются ли эти события зависимыми или нет? В данном случае они будут зависимыми, так как при возникновении события A остается на одного пловца меньше. Аналогично и для событий B и C. Значит, формулу следует записать в виде:

$$P\left(ABC\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\mid A\right)\cdot P\left(C\mid A,B\right)$$

Вероятность события A при $n=4+6+7+5=22$ пловцах и из них $m=22-6=16$ не из Италии, равна

$$P\left(A\right)=\frac{m}{n}=\frac{16}{22}=\frac{8}{11}$$

После того, как событие A произошло, остается $n-1=21$ пловец и $m_B=21-6=15$, значит, вероятность события B, равна:

$$P\left(B\mid A\right)=\frac{m_B}{n-1}=\frac{15}{21}$$

По аналогии, вероятность события C (при $m_C=20-6=14$):

$$P\left(C \mid A,B\right) = \frac{m_C}{n-2} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

Вычисляем произведение вероятностей этих событий, имеем:

$$P\left(ABC\right) = \frac{8}{11} \cdot \frac{15}{21} \cdot \frac{7}{10} = \frac{84}{231}$$

И обратная вероятность, соответствующая тому, что хотя бы один пловец из Италии будет на первых трех местах, равна:

$$1 - P\left(ABC\right) = 1 - \frac{84}{231} = \frac{7}{11}$$

Ответ: 7/11.

А вот следующую задачу решите самостоятельно. Обратите внимание здесь на фразу «хотя бы один» и примените тот же прием, что мы только что рассмотрели.

Задача 4. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Разбираем задачки из ЕГЭ на сложение вероятностей

Сначала рассмотрим похожую задачу на вероятность выступления под тем или иным номером. Обратите внимание, как формулировки заданий меняют суть решений. Например, в следующей задаче нужно использовать формулу сложения вероятностей, вместо умножения.

Задача 1. В соревнованиях по плаванию участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Италии, 7 спортсменов из России и 5 из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что спортсмен из Италии Джованни Лучио будет выступать первым, вторым или третьим.

Решение.

Здесь мы сразу видим союз «или» в формулировке задачи «найти вероятность, что спортсмен будет выступать **или** первым **или** вторым **или** третьим». Этот союз означает сложение следующих событий:

A: Джованни Лучио будет выступать первым;

B: Джованни Лучио будет выступать вторым;

C: Джованни Лучио будет выступать третьим.

Так как речь идет о конкретном спортсмене, то число благоприятных исходов для него, равно $m = 1$. Всего же равновероятных исходов $n = 4 + 6 + 7 + 5 = 22$. Получаем вероятности появлений событий A, B и C:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{m}{n} = \frac{1}{22}$$

Учитывая, что эти события несовместны (Джованни Лучио не может одновременно выступать на двух местах), получаем значение искомой вероятности:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$P(A + B + C) = \frac{1}{22} + \frac{1}{22} + \frac{1}{22} = \frac{3}{22}$$

Ответ: 3/22.

А теперь немного изменим формулировку этой задачи и запишем ее так.

Задача 2. В соревнованиях по плаванию участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Италии, 7 спортсменов из России и 5 из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что спортсмены из Италии будут выступать первыми или вторыми.

Решение.

Видите? Здесь речь идет уже не о конкретном пловце, а обо всех спортсменах из Италии. И это кардинально меняет решение, так как следующие события становятся совместными:

A: на первом месте выступает пловец из Италии;

B: на втором месте выступает пловец из Италии.

Нам нужно найти вероятность $P(A + B)$, которая для совместных событий записывается в виде:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Сначала найдем вероятности событий A и B. Так как всего участников $n = 4 + 6 + 7 + 5 = 22$ и из них $m = 6$ из Италии, то

$$P(A)=P(B)=\frac{m}{n}=\frac{6}{22}=\frac{3}{11}$$

Теперь вычислим вероятность произведения событий А и В. Видим, что эти события зависимы, так как при возникновении события А (первым участвует пловец из Италии), остается меньше на одного пловца и на одного спортсмена из Италии. Поэтому,

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)$$

где $P(B\,|\,A)=\frac{m-1}{n-1}=\frac{5}{21}$. Соответственно,

$$P(AB)=\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{21}$$

Подставляем все числовые значения в формулу суммы, получаем искомую вероятность:

$$P(A+B)=\frac{3}{11}+\frac{3}{11}-\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{21}=$$
$$=\frac{3}{11}\cdot\left(2-\frac{5}{21}\right)=\frac{3}{11}\cdot\frac{37}{21}=\frac{37}{77}$$

Ответ: 37/77.

Задача 3. Помещение освещается фонарем с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение.

А) Через умножение событий. Обычно такие задачи решают с использованием противоположных событий. Сначала определяются два независимых события:

А: в течение года перегорит первая лампа;

В: в течение года перегорит вторая лампа.

Затем, вычисляется вероятность того, что и первая и вторая лампы перегорят, то есть, вычисляется вероятность произведения событий $C=A\cdot B$:

$$P(C)=P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

И, так как, по условию задачи $P(A)=P(B)=0,2$, получаем:

$$P(C)=0,2\cdot 0,2=0,04\,.$$

Противоположное событие $\overline{C}$ будет означать «не перегорание хотя бы одной лампы». Вероятность этого события, равна:

$$P\left(\overline{C}\right)=1-P\left(C\right)=1-0,04=0,96$$

Б) Через сложение событий. Эту же задачу можно решить и через сложение событий. Введем два события:

А: в течение года не перегорит первая лампа;

В: в течение года не перегорит вторая лампа.

Фраза «хотя бы одна лампа не перегорит» означает, что не перегорит первая лампа или не перегорит вторая лампа. То есть, нужно найти вероятность суммы событий $P(A+B)$. Очевидно, что эти события совместны – они могут произойти одновременно (в пределах года), следовательно,

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)$$

Вероятности событий $P\left(A\right)=P\left(B\right)=1-0,2=0,8$, а вероятность их произведения, равна

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)=0,8\cdot 0,8=0,64,$$

так как эти события независимы. Подставляем числовые значения в формулу, получаем:

$$P\left(A+B\right)=0,8+0,8-0,64=0,96$$

Ответ: 0,96.

Этот пример показывает, что задачи по теории вероятностей можно решать разными способами и при верных решениях результаты неизбежно сойдутся. Ниже представлена похожая задача. Попробуйте ее решить самостоятельно двумя способами.

Задача 4. По отзывам покупателей Михаил Михайлович оценил надежность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,61. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,83. Михаил Михайлович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что хотя бы один магазин доставит товар.

Разбираем задачки из ЕГЭ на проценты

В первую очередь разберемся как проценты связаны с вероятностью. Ранее мы говорили, что вероятность – это доля возникновений событий при проведении экспериментов. А проценты – это, как раз, и есть доля. Например, 50% соответствует половине доли, то есть, вероятности 0,5. Если взять 100%, то получим целую долю или вероятность 1. В результате получается, что вероятность равна процентам, деленным на 100:

$$P = \frac{a\%}{100}$$

Однако, эта формула справедлива только в тех случаях, когда проценты a определены относительно 100%. А вот если, например, рассмотреть задачу, в которой из 100% изделий в продажу поступают только 86% и из них 6% брака, то вероятность выбора бракованного изделия, поступившего в продажу, будет уже равна

$$P = \frac{6}{86} \approx 0,07$$

Почему это так? Дело в том, что выбор бракованного изделия осуществляется только из поступивших в продажу, значит, размер полной группы событий, в данном случае, можно определить как $n = 86\%$. И в ней $m = 6\%$ составляет брак – размер группы благоприятных исходов (для случайного события). Отсюда автоматически получается, что

$$P = \frac{m}{n} = \frac{6}{86}$$

Следующая задача как раз и решается, исходя из такой логики рассуждений.

Задача 1. На фабрике керамической посуды 20% произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Решение.

Сначала нужно представить весь этот процесс у себя в голове. Здесь получается, что 20% составляет брак, значит, 100-20=80% тарелок без брака. В продажу поступают эти 80% тарелок и еще 100-70=30% дефектных. Разумеется, эти 30% следует брать от 20% всех бракованных изделий, то есть, в продажу поступает $20 \cdot 0,3 = 6\%$ брака. Итого из 100% произведенных тарелок в продажу идет 80%+6% = 86% изделий.

Теперь определим случайное событие А как «случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов». Мы вычислили, что доля изделий, поступивших в продажу, равна $n = 86\%$, и среди них доля не бракованных составляет $m = 86 - 6 = 80\%$. Получаем значение искомой вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{80}{86} = 0,93023 \approx 0,93$$

Ответ: 0,93.

Задача 2. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 66% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение.

Сначала представим эту задачу. Схематично она показана на рисунке ниже. Нам нужно найти вероятность положительного анализа.

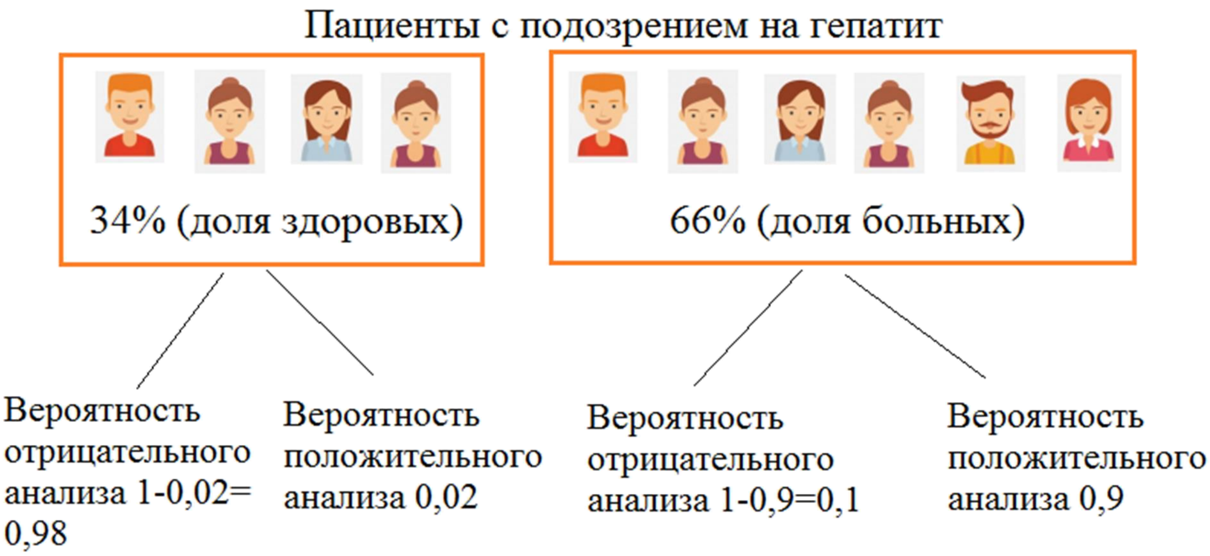
Из рисунка видно, что положительный анализ может возникнуть в двух случаях:

А: когда пациент здоров, но анализ дал положительный результат;

В: когда пациент болен и анализ дал положительный результат.

Нас интересует вероятность возникновения или события А или события В, то есть, нужно вычислить $P(A+B)$. Очевидно, что события А и В несовместны, так как пациент не может быть одновременно и здоровым и больным. Поэтому, формула вероятности суммы двух случайных событий запишется в виде:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$



Найдем вероятности событий A и B. Событие A возникает когда пациент здоров (вероятность составляет 34/100 = 0,34) и анализ оказался положительным (вероятность 0,02). Следовательно,

$$P(A) = 0,34 \cdot 0,02 = 0,0068$$

Аналогично и для события B. Оно возникает когда пациент болен (вероятность 66/100=0,66) и анализ дал положительный результат (вероятность 0,9):

$$P(B) = 0,66 \cdot 0,9 = 0,594$$

И искомая вероятность, равна:

$$P(A+B) = 0,0068 + 0,594 = 0,6008$$

Ответ: 0,6008.

Задача 3. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30% этих стекол, вторая – 70%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 4%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение.

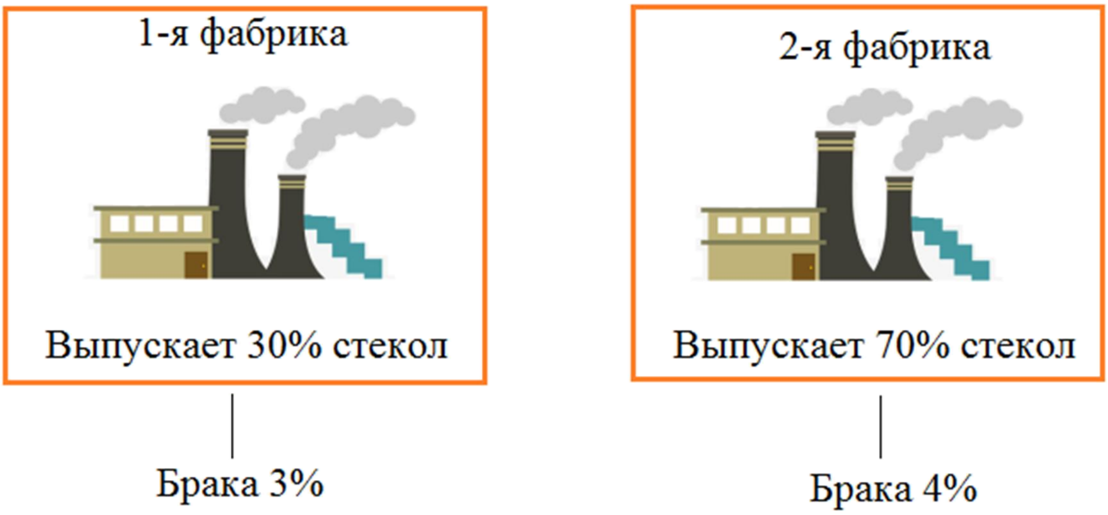
Изобразим схематично условия данной задачи (см. рисунок ниже). Из него хорошо видно, что стекло может оказаться бракованным в двух случаях:

A: стекло выпущено первой фабрикой и оно оказалось бракованным;

B: стекло выпущено второй фабрикой и оно оказалось бракованным.

Нас здесь интересует или возникновение события А или возникновение события В, то есть, нужно найти $P(A+B)$. Учитывая, что эти события несовместны (мы покупаем только одну фару, а она может быть произведена или 1-й или 2-й фабрикой), формула вероятности суммы двух событий записывается в виде:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$



Найдем вероятности событий А и В по аналогии с тем, как мы это делали в предыдущей задаче:

$$P(A)=0,3\cdot 0,03=0,009$$
$$P(B)=0,7\cdot 0,04=0,028$$

И искомая вероятность, равна:

$$P(A+B)=0,009+0,028=0,037$$

Ответ: 0,037.

Задачки на частоту событий

В таких задачах прямо указывают, что нужно найти частоту какого-либо события. Соответственно, для этого используется формула

$$P(A)=\frac{N_A}{N},$$

где N – общее число экспериментов; N_A – число экспериментов, в которых произошло событие А. Рассмотрим такие задачи.

Задача 1. В некотором районе в год рождается 2000 детей. Из них 1100 мальчиков, остальные – девочки. Найдите частоту рождаемости девочек в течение года.

Решение.

Запишем событие, для которого будем определять частоту: A – «рождение девочки в течение года». Общее число экспериментов N нам здесь дано, оно равно N=2000. Благоприятных исходов для события A будет $N_A = 2000 - 1100 = 900$. Получаем частоту события A:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{900}{2000} = \frac{9}{20} = 0,45$$

Ответ: 0,45.

Задача 2. Вероятность того, что новый HDD (жесткий диск) в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,05. В некотором городе из 3000 проданных HDD в течение года в гарантийную мастерскую поступили 120 штук. Насколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Решение.

Сначала найдем частоту наступления гарантии для HDD. Рассуждения здесь такие же, как и в предыдущей задаче. Введем событие A – «наступило гарантийное событие для HDD». Имеем число экспериментов N=3000 и число исходов, благоприятных событию A, равное $N_A = 120$. Получаем частоту:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{120}{3000} = 0,04$$

И эта частота отличается от вероятности на

$$0,05 - 0,04 = 0,01$$

Ответ: 0,01.

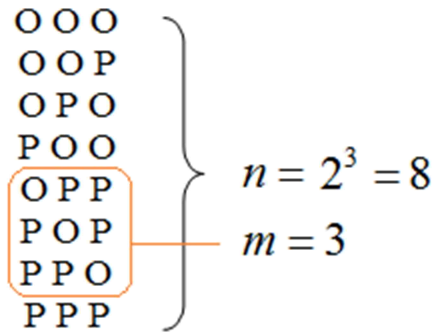
Прокачиваемся до формулы Бернулли

В ОГЭ и ЕГЭ часто встречаются задачи на подбрасывание монетки и игрального кубика. Для начала рассмотрим одну такую типовую задачу.

Задача 1. В случайном эксперименте симметричную монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно 2 раза.

Решение.

Такие задачи, обычно, решаются следующим образом. Задается событие А – «выпадение решки ровно два раза из трех». Вычисляется число возможных исходов при трехкратном подбрасывании монетки: $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$. Их также можно изобразить графически (здесь «О» – это орел, а «Р» – это решка):



Среди этих вариантов число благоприятных исходов для события А, равно $m = 3$ (они выделены оранжевым цветом). Соответственно, получаем значение вероятности события А:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Ответ: 0,375.

Однако, эту же задачу можно решить еще и так. Обозначим событие А как «выпадение решки при однократном подбрасывании». Вероятность этого события нам известна, она равна

$$p = P(A) = 1/2.$$

(Мы здесь вероятность $P(A)$ обозначили через букву p). А противоположная вероятность

$$1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

будет соответствовать всем остальным возможным исходам. В нашем случае – выпадению орла при однократном подбрасывании монетки. Используя эти обозначения, можно заметить, что вероятности событий, когда решка выпадает ровно два раза из трех, равны:

$$\begin{array}{ccc|l} О & Р & Р & (1-p)\cdot p\cdot p = p^2\cdot(1-p) \\ Р & О & Р & p\cdot(1-p)\cdot p = p^2\cdot(1-p) \\ Р & Р & О & p\cdot p\cdot(1-p) = p^2\cdot(1-p) \end{array}$$

Эта вероятность для каждого случая одна и та же. И, учитывая, что эти три события несовместны, искомую вероятность можно записать в виде:

$$P = 3\cdot p^2\cdot(1-p)$$
$$P = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Как видите, получаем тот же результат. Кроме того, множитель 3, стоящий перед выражением, есть не что иное, как биноминальный коэффициент, то есть, число сочетаний из 3 по 2, которое записывается так:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3$$

Благодаря введению биноминального коэффициента, вместо чисел 2 и 3 можно записывать любые другие натуральные числа k и n (при условии $k \le n$). И обобщить данную задачу на случай из n подбрасываний монетки с вычислением вероятности появлений решки (либо орла) ровно k раз (неважно в каком порядке):

$$P = C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Эта формула называется **формулой Бернулли**. Она позволяет на автомате решать задачи, подобные рассмотренной, без необходимости расписывания всех вариантов исходов. Возможно, она кажется несколько сложной и громоздкой? Однако, когда имеем дело с большим числом подбрасываний (от трех и более), то ее использование заметно упрощает процесс решения. И для примера рассмотрим такую задачу.

Задача 2. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 2 раза.

Решение.

Определяем событие А – «выпадение орла при однократном подбрасывании монетки». Его вероятность $p = P(A) = 1/2$. Общее число подбрасываний равно

$n=4$ из них $k=2$ должен выпасть орел (в любом порядке). Подставляем эти значения в формулу Бернулли, получаем значение искомой вероятности:

$$P=C_4^2\cdot p^2\cdot(1-p)^{4-2}$$
$$P=\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{6}{16}=0{,}375$$

Ответ: 0,375.

Обратите внимание, что мы получили тот же результат, что и при трехкратном подбрасывании. То есть, вероятность выпадения двух орлов при трехкратном и четырехкратном подбрасывании монетки одинакова. И в этом нет ошибки – это действительно так.

И еще обратите внимание на то, что формула Бернулли вычисляет вероятность появления в n экспериментах некоторого события А ровно k раз в произвольном порядке. Если же порядок имеет значение, например, нужно найти вероятность того, что первые два раза выпадет орел, а остальные два раза решка, то формула Бернулли здесь уже неприменима.

Для закрепления материала рассмотрим такую задачу.

Задача 3. Вероятность того, что в течение дня пойдет дождь, равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение недели три дня будут дождливыми.

Решение.

Зададим событие А – «в течение дня пойдет дождь». Вероятность этого события равна $p=P(A)=0{,}2$. Нас интересует вероятность того, что из $n=7$ дней $k=3$ дня будут дождливыми. Запишем формулу Бернулли для этих значений, получим:

$$P=C_7^3\cdot p^3\cdot(1-p)^{7-3}$$
$$P=\frac{7!}{3!\cdot(7-3)!}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^4=$$
$$=\frac{5040}{6\cdot 24}\cdot 0{,}008\cdot 0{,}4096=$$
$$=35\cdot 0{,}0032768=0{,}114688$$

Ответ: 0,114688.

А следующую задачу решите самостоятельно.

Задача 4. Вероятность того, что в течение года турист С. поедет в Японию, равна 0,4. Найдите вероятность того, что турист С. посетит Японию дважды на протяжении 6 лет.

Задачки повышенной сложности

До сих пор мы с вами рассматривали, в основном, задачи, где нужно было или умножить или складывать вероятности событий. Здесь же разберем несколько задач, в которых используются оба подхода для расчета вероятности события.

Задача 1. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,08. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение.

В данной задаче нужно найти вероятность того, что батарейка будет забракована. Это может произойти при двух несовместных исходах:

А: батарейка исправна и она бракуется;

В: батарейка неисправна и она бракуется.

Из формулировки видно, что событие А состоит из двух независимых событий: батарейка исправна (вероятность 1-0,05=0,95) и она бракуется системой контроля (вероятность 0,08). Получаем вероятность события А:

$$P(A) = 0,95 \cdot 0,08 = 0,076$$

Аналогично для события В: батарейка неисправна (вероятность 0,05) и она бракуется системой (вероятность 0,98):

$$P(B) = 0,05 \cdot 0,98 = 0,049$$

В результате получаем значение искомой вероятности:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$
$$P(A+B)=0,076+0,049=0,125$$

Ответ: 0,125.

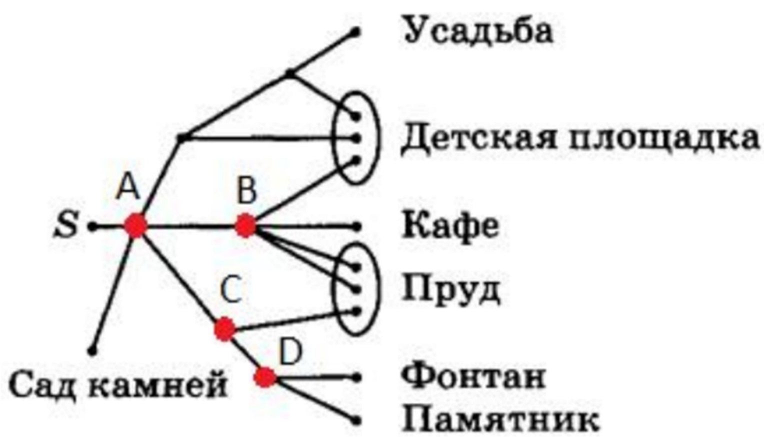
Задача 2. Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.

Решение.

Введем два несовместных события:

A: Артем случайным образом дошел до пруда;

B: Артем случайным образом дошел до фонтана.



Теперь рассмотрим ситуации, при которых Артем может дойти до пруда из точки S. Первый вариант, когда он в точке A случайным образом выберет дорогу в точку B. Вероятность этого события равна 1/4, так как имеется $n=4$ дорожки для продолжения пути (одну из них он выбирает с равной вероятностью) и только одна $m=1$ ведет в точку В. Получаем $P=m/n=1/4$. Затем, из точки В он может пройти по двум из четырех дорожек к пруду (вероятность этого события 2/4=1/2). Таким образом, вероятность маршрута S-A-B-пруд, равна

$$P_{SAB}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Второй маршрут, ведущий к пруду, проходит через точки А и С. Вероятность того, что он из А пойдет в С, равна 1/4. А вероятность из точки С повернуть к пруду – 1/2. Получаем вероятность выбора маршрута S-A-C-пруд:

$$P_{SAC}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Так как эти маршруты несовместны, то общая вероятность того, что Артем из S дойдет до пруда, равна:

$$P(A)=P_{SAB}+P_{SAC}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

По аналогии найдем вероятность выбора маршрута S-A-C-D-фонтан. Для этого Артем должен с вероятностью 1/4 из точки А попасть в точку С. Из точки С с вероятностью 1/2 – в точку D. И из точки D с вероятностью 1/2 – к фонтану. Общая вероятность выбора этого маршрута, равна:

$$P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.$$

Получаем значение искомой вероятности:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$
$$P(A+B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}=0{,}3125$$

Ответ: 0,3125.

Задача 3. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,7, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

Решение.

Рассмотрим два несовместных события:

А – ковбой Джон промахивается из пристрелянного револьвера;

В – ковбой Джон промахивается из непристрелянного револьвера.

Решение задачи будет состоять в подсчете суммы вероятностей этих двух событий, так как Джон может промахнуться или в первом случае, или во втором.

Найдем вероятность события А. Оно состоит из двух независимых событий: во-первых, Джон должен схватить пристрелянный револьвер (вероятность 2/10) и, во-вторых, промахнуться (вероятность 1-0,7), в итоге получаем:

$$P(A)=\frac{2}{10}\cdot(1-0,7)=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{100}$$

Найдем вероятность события В. Оно также состоит из двух независимых событий: во-первых, Джон должен схватить непристрелянный револьвер (вероятность 8/10) и, во-вторых, промахнуться (вероятность 1-0,3), получаем:

$$P(B)=\frac{8}{10}\cdot(1-0,3)=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{56}{100}$$

Искомая вероятность того, что Джон промахнется, равна

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{6}{100}+\frac{56}{100}=\frac{62}{100}=0,62$$

Ответ: 0,62.

Задача 4. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение.

Введем два совместных события:

А: кофе остался в первом автомате;

В: кофе остался во втором автомате.

Вероятности этих событий равны и даны в задаче: $P(A)=P(B)=0,4$. Введем третье событие С=А+В, которое будет означать, что кофе закончился хотя бы в одном автомате. Вероятность этого события, равна

$$P(C)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$P(C)=0,4+0,4-0,22=0,58$$

А противоположное событие $\overline{C}$ будет означать, что кофе осталось в обоих автоматах. Получаем значение искомой вероятности:

$$P(\overline{C})=1-P(C)=1-0,58=0,42$$

Ответ: 0,42.

Задача 5. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго – 40% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 48% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение.

Обратите внимание, что здесь нам даны доли в 60% и 40% закупаемых яиц только высшей категории и указано, что всего приобретается 48% таких яиц, поступивших в продажу. Поэтому, для ее решения мы пойдем от обратного: обозначим через x вероятность того, что купленное яйцо будет из первого хозяйства. И для простоты восприятия решения, положим, что всего в обоих хозяйствах закупается n яиц. Тогда в первом хозяйстве было закуплено $x \cdot n$ яиц, из них $0,6x \cdot n$ высшей категории. Во втором хозяйстве закуплено $(1-x)\cdot n$ яиц, из них $0,4\cdot(1-x)\cdot n$ высшей категории. Всего высшую категорию имеют 0,48n яиц. В результате можем записать такое равенство:

$$0,6x\cdot n+0,4\cdot(1-x)\cdot n=0,48n$$

Сокращая левую и правую части на n, получаем:

$$0,6x+0,4\cdot(1-x)=0,48$$
$$0,6x+0,4-0,4x=0,48$$
$$0,2x=0,08$$
$$x=0,4$$

Ответ: 0,4.

Задача 6. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем – 0,9. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,96?

Решение.

Эту задачу проще всего решить методом перебора: найти вероятности поражения цели при двух, трех, четырех и т.д. выстрелах. В задаче нам дана вероятность 0,3 поражения при первом выстреле и при последующих – 0,9. События, связанные с поражением цели при текущем выстреле, зависимы между собой, так как возникновение одного из них означает прекращение стрельбы. А вот обратные им события – промах при текущем выстреле – независимы. Поэтому мы будем искать вероятность не поражения цели при n выстрелах ($n > 1$) по формуле:

$$P_n = (1-0,3)\cdot(1-0,9)^{n-1},$$

а затем, вычислять обратную вероятность ее поражения:

$$1 - P_n$$

В результате, получаем:

- для двух выстрелов:

$$1 - P_2 = 1 - 0,7\cdot 0,1 = 0,93$$

- для трех выстрелов:

$$1 - P_3 = 1 - 0,7\cdot 0,1^2 = 0,993$$

Эта величина больше, чем 0,96, значит, при трех выстрелах цель будет поражена с вероятностью больше 0,96.

Ответ: 3.

Задача 7. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причем погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,9 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 11 марта, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 14 марта в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение.

Для наглядности решение выполним в виде таблицы, в которую будем записывать вероятности хорошей и отличной погоды во все дни с 11 по 14 марта. Изначально мы знаем, что 11-го числа погода стояла хорошая, значит, ее вероятность равна 1, а вероятность отличной погоды, равна 0.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1			
отличная	0			

Далее, 12 марта хорошая погода повторится с вероятностью 0,9, а отличная установится с вероятностью 1-0,9 = 0,1. Получаем следующую запись в таблице:

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9		
отличная	0	0,1		

А вот 13 марта хорошая погода может возникнуть уже при двух несовместных исходах: А – «погода была хорошей и не изменилась» и В – «погода была отличной и изменилась». Вероятность события А равна произведению вероятностей двух независимых событий: погода была хорошей (вероятность по таблице 0,9) и она не изменилась (вероятность по условию задачи 0,9):

$$P(A) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81.$$

Вероятность события В вычисляется аналогично: погода была отличной (вероятность по таблице 0,1) и она изменилась (вероятность по условию задачи 0,1): $P(B) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$. В результате, хорошая погода 13-го числа установится с вероятностью

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,81 + 0,01 = 0,82$$

а отличная – с противоположной вероятностью:

$$1 - P(A+B) = 1 - 0,82 = 0,18$$

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	0,756
отличная	0	0,1	0,18	0,244

Рассуждая аналогичным образом, для 14-го числа, имеем:

$$P(A+B) = 0,82 \cdot 0,9 + 0,18 \cdot 0,1 = 0,756$$
$$1 - P(A+B) = 1 - 0,756 = 0,244$$

Ответ: 0,244.

Философское заключение: отсутствие случайности порождает судьбу?

Во введении к этому пособию было отмечено, что мы рассматриваем явления, которые нам лишь кажутся случайными, но, возможно, не являются таковыми на самом деле. Хорошая демонстрация этой идеи – культовый фильм «День сурка», в котором главный герой постоянно просыпается в один и тот же день, перемещаясь на один день в прошлое. И что мы видим? Люди в этот день повторяют одни и те же поступки, совершают одни и те же ошибки, делают один и тот же выбор. И если бы главный герой не вмешивался во все происходящее, то дни в точности повторяли бы друг друга.

Но это фильм, фантастика, а что было бы, если бы мы тоже могли перемещаться в свое прошлое, но только наблюдать за всем происходящим, не вмешиваясь в события? Увидели бы мы такое же повторение одних и тех же своих поступков? Точно ответить на этот вопрос, наверное, никто не сможет, но если мы примем, что в природе не существует настоящих (фундаментальных) случайностей, то наши прошлые дни будут напоминать день сурка: сколько бы раз мы в них не возвращались – видели бы одно и то же. Это как с подбрасыванием монетки в абсолютно одинаковых условиях и одинаковым способом – все время будет выпадать одна ее сторона. А, что же такое «настоящая» случайность? Например, это когда в абсолютно одинаковых условиях мы получаем разные исходы экспериментов. Предположим, имеется некая «волшебная» монетка, с которой совершаем абсолютно одинаковые подбрасывания, а исходы получаем разные. Но таких «волшебных» предметов пока еще не найдено. Ту же самую аналогию имеем с возвращением в прошлое, когда мы наблюдаем одни и те же условия, в которых совершаются определенные (каждодневные) события. И если «настоящих» случайностей нет, то исходы будут абсолютно теми же самыми, то есть, день повторится без изменений. Благодаря отсутствию таких фундаментальных случайностей мы можем строить планы на будущее, предполагая определенный исход событий, можем перемещаться на машинах и самолетах, понимая как они будут себя вести в пространстве, наконец, существует самая точная наука на Земле – математика! И, возможно, всего этого не было бы при наличии «настоящих» случайностей в природе. Но это лишь косвенные подтверждения отсутствия случайностей в природе. Так это или нет на самом деле – решать только вам.

Ну, хорошо, с прошлым более-менее разобрались, а причем здесь судьба? Дело в том, что настоящее, которое происходит прямо сейчас, можно представить как прошлое по отношению к будущему. Это значит, что если бы вы из будущего переместились не в прошлое, а в настоящее, и сейчас бы наблюдали за собой, то в точности знали бы, что будете делать дальше! Вы будете совершать «свои» поступки, делать «свой» выбор и, тем не менее, «вы из будущего» в точности знали бы что произойдет. Ситуация кажется парадоксальной: с одной стороны поступки совершаете «вы» и так, как захотите, ограничений никаких нет, но с другой стороны – они уже известны «вам из будущего». В действительности никакого парадокса нет, если помнить об отсутствии случайностей в природе. Тогда наше будущее это как бы «история будущего», которая пока еще неизвестна, в отличие от «истории прошлого». Мы же помним многое, что с нами происходило в прошлом, отдельные поступки, ошибки, удачи и т.п? Но повлиять на это уже не можем – все это уже в прошлом. Так же и с будущим. Получается, что оно уже сложено из наших же поступков, но мы их еще не успели совершить и появляется вроде как «история будущего», которую мы и называем судьбой.

Что же в результате всего этого имеем? С одной стороны, судьба в наших руках и она будет такой, какой мы ее создадим. И это, наверное, хорошая новость. С другой стороны, то что мы сделаем предопределено, если полагать, что в природе нет случайностей. Но предопределено нашим интеллектом, нашими физическими и эмоциональными способностями, и, конечно же, внешними обстоятельствами, которые влияют на каждый наш выбор. А потому получается, что человек в большей степени хозяин своей жизни, чем раб обстоятельств. И чем более развит индивид: интеллектуально, культурно, духовно, физически и т.п., тем в большей степени он свободен, а значит, тем больше шансов достичь желаемых целей, поставленных им в этой жизни.

Приложение 1. Что должен знать школьник по теории вероятностей

Чтобы вам было проще ориентироваться в представленном материале, ниже приведены основные математические выдержки.

1. Сложение и умножение событий:

- Событие $C = A + B$ означает возникновение или события A или события B в ходе проведения эксперимента;
- Событие $C = A \cdot B$ означает возникновение и события A и события B в ходе проведения эксперимента.

2. Вероятность события может быть вычислена по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее число равновероятных исходов, образующих полную группу событий; m — число исходов, благоприятных событию A.

3. Частота появления события A определяется выражением:

$$P(A) = \frac{N_A}{N},$$

где N — общее число экспериментов; N_A — число исходов, в которых событие A произошло.

4. Противоположное событие $\overline{A}$ события A включает в себя все возможные исходы, не входящие в событие A. Соответственно, для них справедливы следующие выражения:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

5. Определения совместных и несовместных событий:

- Два события называются **совместными**, если они могут одновременно произойти в ходе проведения эксперимента.
- Два события называются **несовместными**, если они не могут одновременно произойти в ходе проведения эксперимента.

6. Определения зависимых и независимых событий:

- Два события называются **зависимыми**, если появление одного из них влияет на вероятность появления другого.
- Два события называются **независимыми**, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого.

7. Вероятность суммы двух событий A и B:

- для несовместных событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$
- для совместных событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

8. Вероятность произведения двух событий:

- для независимых событий: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$
- для зависимых событий: $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B)$

9. Формула Бернулли для вычисления в n экспериментах k появлений события A (неважно в каком порядке) при известной вероятности $p=P\left(A\right)$, записывается в виде:

$$P=C_n^k p^k\cdot\left(1-p\right)^{n-k}$$

Приложение 2. Простые задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 51 спортсмен, среди которых 14 спортсменов из России, в том числе Т. Найдите вероятность того, что в первом туре Т. будет играть с каким-либо спортсменом из России.

Задача 2. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Задача 3. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 3 прыгуна из Голландии и 6 прыгунов из Аргентины. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что тринадцатым будет выступать прыгун из Аргентины.

Задача 4. В группе туристов 20 человек. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 4 человека за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В., входящий в состав группы, полетит первым рейсом вертолёта.

Задача 5. В среднем из 600 садовых насосов, поступивших в продажу, 3 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Задача 6. Какова вероятность того, что последние три цифры телефонного номера случайного абонента совпадают?

Задача 7. За круглый стол на 21 стул в случайном порядке рассаживаются 19 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не окажутся на соседних местах.

Задача 8. Какова вероятность того, что последние две цифры телефонного номера случайного абонента в сумме дают 10?

Задача 9. В фирме такси в наличии 60 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Задача 10. Из множества натуральных чисел от 28 до 47 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

Задача 11. Миша, Олег, Настя и Галя бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет не Галя.

Задача 12. В классе 16 учащихся, среди них два друга — Олег и Михаил. Класс случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Олег и Михаил окажутся в одной группе.

Задача 13. При изготовлении подшипников диаметром 69 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не более чем на 0,01 мм, равна 0,975. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 68,99 мм или больше, чем 69,01 мм.

Задача 14. Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние четыре цифры идут подряд в порядке убывания, например 3210 или 6543?

Задача 15. Максим с папой решили покататься на колесе обозрения. Всего на колесе 30 кабинок, из них 11 — синие, 7 — зелёные, остальные — оранжевые. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Максим прокатится в оранжевой кабинке.

Задача 16. Найдите вероятность того, что при однократном бросании двух игральных кубиков в сумме выпадет ровно 7 очков. Результат округлите до сотых.

Задача 17. Родительский комитет закупил 30 пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них 12 с картинами известных художников и 18 с изображениями животных. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Вове достанется пазл с изображением животного.

Задача 18. В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 990 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе.

Задача 19. Катя, Настя, Игорь, Даша и Андрей бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен мальчик.

Задача 20. Двое играют в кости – они по разу бросают игральный кубик. Выигрывает тот, у кого больше очков. Если выпадает поровну, то наступает ничья. Первый бросил кубик, и у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что он выиграет.

Приложение 3. Задачи средней сложности для самостоятельного решения

Задача 1. Из ящика, в котором лежат фломастеры, не глядя достали два фломастера. Найдите вероятность того, что эти фломастеры оказались одного цвета, если известно, что в ящике 12 синих и 13 красных фломастеров.

Задача 2. По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,95. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что оба магазина доставят товар.

Задача 3. На уроке физкультуры 26 школьников, из них 12 девочек, остальные — мальчики. По сигналу учителя физкультуры все быстро выстраиваются в одну шеренгу в случайном порядке. Найдите вероятность того, что справа в шеренге первые двое окажутся мальчиками.

Задача 4. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадёт в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0,6$. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется ровно три попытки.

Задача 5. Гигрометр измеряет влажность в помещении картинной галереи. Вероятность того, что влажность окажется выше 40%, равна 0,82. Вероятность того, что влажность окажется ниже 56 %, равна 0,74. Найдите вероятность того, что влажность находится в пределах от 40 % до 56 %.

Задача 6. На складе на одном стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных клавиатур: 30 чёрных, 10 белых и 10 серых. На другом стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных компьютерных мышей: 30 чёрных, 10 белых и 10 серых. Найдите вероятность того, что случайно выбранные клавиатура и мышь будут чёрного цвета.

Задача 7. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежат 10 револьверов, из них только 3 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Задача 8. В роддоме измеряют вес новорождённого. Вероятность того, что вес окажется больше 3 кг, равна 0,87, вероятность того, что вес окажется меньше 3 кг 600 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что вес случайно выбранного новорождённого окажется в пределах от 3 кг до 3 кг 600 г.

Задача 9. На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Задача 10. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Задача 11. На складе на одном стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных клавиатур: 30 чёрных, 10 белых и 10 серых. На другом стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных компьютерных мышей: 30 чёрных, 10 белых и 10 серых. Найдите вероятность того, что случайно выбранные клавиатура и мышь будут одинакового цвета.

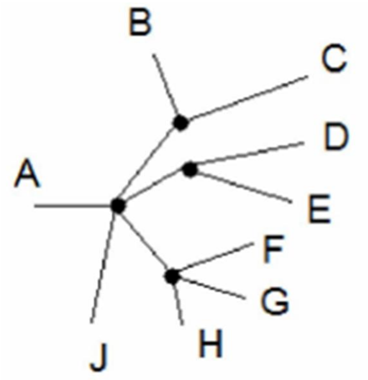
Задача 12. В классе 25 человек, среди них у четверых в году пятёрки по теории вероятностей, а у пятерых в году пятёрки по биологии. При этом нет никого, у кого были бы пятёрки по этим двум предметам. Найдите вероятность того, что случайно выбранный ученик класса имеет пятёрку по одному из этих двух предметов.

Задача 13. Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30% этих стёкол, вторая — 70%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стёкол, а вторая — 4%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Задача 14. На складе в случайном порядке находятся смартфоны: белых 10 штук, черных 20 штук и розовых 10 штук. Также на этом складе в случайном порядке лежат чехлы к ним: белых 20 штук, черных 10 штук и розовых 10 штук. Найдите вероятность того, что взятый наугад смартфон и чехол будут одного цвета.

Задача 15. Стрелок стреляет по мишени. Вероятность того, что он ее поразит, выстрелив по ней, равна 0,8. При поражении мишени стрельба прекращается. Сколько минимум выстрелов должен сделать стрелок, чтобы поразить мишень с вероятностью не менее 0,99?

Задача 16. Иван Михайлович гуляет по парку и начинает свой путь из точки А. На каждой развилке он случайным образом и с равной вероятностью выбирает одну из дорожек. Причем не возвращается на те дорожки, по которым уже прошел. Какова вероятность того, что Иван Михайлович дойдет до точки Е?



Задача 17. Игральную кость (кубик) бросают 2 раза. Найдите вероятность того, что один раз выпало число, большее 3, а другой раз – меньшее 3. Результат округлите до сотых.

Задача 18. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,21.

Задача 19. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,6. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Задача 20. В двух соседних магазинах «Перекресток» и «Пятерочка» продаются ватрушки с сыром. Вероятность того, что в каком-либо магазине закончились ватрушки, равна 0,2. Найдите вероятность того, что в «Пятерочке» ватрушки закончились, а в «Перекрестке» - еще нет.

Приложение 4. Задачи повышенной сложности для самостоятельного решения

Задача 1. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,7. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Задача 2. В Волшебной стране бывает два типа погоды: ясная и пасмурная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 7 августа, погода в Волшебной стране ясная. Найдите вероятность того, что 10 августа в Волшебной стране будет пасмурная погода.

Задача 3. Симметрическую монетку подбрасывают пять раз. Найдите вероятность того, что три раза выпадет орел.

Задача 4. Чтобы поступить в институт на специальность «Туризм», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 55 баллов по каждому из трех предметов – математике, русскому языку и обществознанию. Чтобы поступить на специальность «Механизмы», нужно набрать не менее 55 баллов по каждому из трех предметов – математике, русскому языку и физике. Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 55 баллов по математике, равна 0,5, по русскому языку – 0,7, по физике – 0,4, и по обществознанию – 0,6. Найдите вероятность того, что А. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Задача 5. Вероятность запуска баллистической ракеты с ядерной боеголовкой в течение года, равна 0,01. Найдите вероятность того, что в течение 10 лет будет запущена хотя бы одна такая ракета. Результат округлите до тысячных.

Задача 6. Игральный кубик бросается четырежды. Найдите вероятность того, что дважды выпадет грань с номером 2. Результат округлите до сотых.

Задача 7. В Сказочной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причем погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,6 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 12 февраля, погода в Сказочной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 14 февраля в Сказочной стране погода будет отличная.

Задача 8. На спартакиаде выступают группы — по одной от каждого из заявленных городов. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Ростова будет выступать после группы из Казани и после группы из Уфы? Результат округлите до сотых.

Задача 9. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 45% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Задача 10. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,7. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,56. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Приложение 5. Ответы к задачам

Ответы к простым задачам:

1. 0,26; **2.** 0,75; **3.** 0,15; **4.** 0,2; **5.** 0,995; **6.** 0,01; **7.** 0,9; **8.** 0,09; **9.** 0,55; **10.** 0,3; **11.** 0,75; **12.** 0,2; **13.** 0,025; **14.** 0,0007; **15.** 0,4; **16.** 0,17; **17.** 0,6; **18.** 0,505; **19.** 0,4; **20.** 0,5.

Ответы к задачам средней сложности:

1. 0,48; **2.** 0,76; **3.** 0,28; **4.** 0,096; **5.** 0,56; **6.** 0,36; **7.** 0,55; **8.** 0,8; **9.** 0,93; **10.** 0,973; **11.** 0,44; **12.** 0,36; **13.** 0,037; **14.** 0,3125; **15.** 3; **16.** 0,125; **17.** 0,17; **18.** 0,2877; **19.** 0,24; **20.** 0,16.

Ответы к задачам повышенной сложности:

1. 4; **2.** 0,392; **3.** 0,3125; **4.** 0,266; **5.** 0,096; **6.** 0,12; **7.** 0,48; **8.** 0,33; **9.** 0,5; **10.** 0,16.

Список литературы

1. Млодинов Л. (Не)совершенная случайность: Как случай управляет нашей жизнью. – М.: Livebook, 2019. – 352 с.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. — 6-е изд. стер. — М.: Высш. шк., 1999.— 576 с.

3. Бродский И.Л., Мешавкина О.С. Вероятность и статистика. 10-11 классы. Планирование и практикум: Пособие для учителя М., Аркти, 2009. — 104 с

4. Бунимович Б. А., Булычев В. А. Вероятность и статистика. 5—9 классы: Пособие для общеобразоват. учеб. заведений. М.: Дрофа, 2002. — 160 с.

5. Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях: Элементы теории вероятностей в курсе средней школы. Пособие для учителя/Пер. с фр. А. К. Звонкина. М.: Просвещение, 1979. — 176 с.

6. Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. Введение в теорию вероятностей. - М., Наука, 1982. — 160 с.

7. Кордемский Б. А. Математика изучает случайности. Пособие для учащихся. М., «Просвещение», 1975. — 223 с.

8. Лютикас В.С. Школьнику о теории вероятностей. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 8—10 классов. 2-е изд., доп. — М.: Просвещение, 1983. — 127 с.

9. Мордкович А. Г., П. В. Семенов. События. Вероятности. Статистическая обработка данных: Дополнительные параграфы к курсу алгебры 7—9 кл. общеобразоват. учреждений 5-е изд. — М., 2008. — 112 с.

10. Ф. Мостеллер Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями/Пер. с англ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975.— 112с.